

# المعاصر

رياضيات - فيزياء - كيمياء - أحياء

في  
التحصيلي

المؤلف / عماد الجزيري

الدمام ٠٥٥٣٤٦٧٩٤٠



شرح لجميع أجزاء الرياضيات  
والفيزياء والكيمياء والأحياء  
بأبسط الطرق

1+2

التركيز في الشرح على  
أهم الموضوعات لاختبار  
التحصيلي



تجميعات السنوات السابقة  
محلولة كاملة في كل مادة  
على حده



فيديو هات شرح لمنهج  
الرياضيات وتجميعات  
الرياضيات



فريق العمل

أ/ عماد الجزيري (رياضيات)  
أ/ أسامة عبدالغني (فيزياء)  
أ/ عبدالرازق حجازي (كيمياء)  
أ/ إسلام علي (أحياء)

مميزات الكتاب



# رياضيات

## مميزات قسم الرياضيات

- ✓ شرح كل جزء في الدرس وحل أمثلة اختبارات
- على كل جزئية حلاً نموذجياً
- ✓ تجميعات السنوات السابقة محلولة كاملاً
- بعد نهاية كل موضوع
- ✓ كل موضوع له فيديو لشرح وتوضيحه
- بنظام الباركود اسكنر
- ✓ جميع التجميعات ( 1437 - 1436 - 1435 )
- مشروحة بالفيديو

المؤلف / عماد الجزيري

مؤلف سلسلة كتب المعاصر في القدرات والتحصيلي

الدمام 0553467940

قناة المعاصر في شرح القدرات و التحصيلي

Tube



## مواضيع الرياضيات

- ١ المتجهات
- ٢ النهايات
- ٣ المشتقات
- ٤ التكامل
- ٥ حساب المثلثات
- ٦ الأسس واللوغاريتمات
- ٧ المصفوفات والمحددات
- ٨ المتتابعات
- ٩ الجبر
- ١٠ العدد التخيلي
- ١١ المستوى القطبي
- ١٢ تحليل الدوال بيانياً
- ١٣ الإحتمالات
- ١٤ القطوع
- ١٥ الهندسة التحليلية
- ١٦ الهندسة المستوية

## جميع الموضوعات مشروحة بالفيديو

على موقع المؤلف

[www.qudratonline.com](http://www.qudratonline.com)





## ④ ضرب عدد في متجه

عند ضرب عدد في المتجه يتم ضرب العدد في  $x, y$

## ⑤ جمع و طرح المتجهات

إذا كان  $\vec{u} = \langle x_2, y_2 \rangle$  و  $\vec{v} = \langle x_1, y_1 \rangle$  فإن

$$\checkmark \vec{v} + \vec{u} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

$$\checkmark \vec{v} - \vec{u} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle$$

مثال 6 إذا كان  $\vec{u} = \langle 1, 3 \rangle, \vec{v} = \langle -1, 3 \rangle$

أوجد  $2\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, -4\vec{u}$

$$2\vec{u} + \vec{v} = 2\langle 1, 3 \rangle + \langle -1, 3 \rangle =$$

الحل

$$= \langle 2, 6 \rangle + \langle -1, 3 \rangle = \langle 1, 9 \rangle$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \langle 1, 3 \rangle - \langle -1, 3 \rangle = \langle 2, 0 \rangle$$

$$-4\vec{u} = -4\langle 1, 3 \rangle = \langle -4, -12 \rangle$$

## ⑥ الضرب الداخلي للمتجهات

إذا كان  $\vec{u} = \langle x_2, y_2 \rangle$  و  $\vec{v} = \langle x_1, y_1 \rangle$  فإن

الضرب الداخلي بينهما هو  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

مثال 7 إذا كان  $\vec{u} = \langle 1, 3 \rangle, \vec{v} = \langle -1, 4 \rangle$

أوجد  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

الحل

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle 1, 3 \rangle \cdot \langle -1, 4 \rangle =$$

$$(1)(-1) + (3)(4) = 11$$

## ملحوظة

إذا كان ناتج الضرب الداخلي للمتجهان = صفر

فإن المتجهين متعامدان

## ① الصورة الإحداثية للمتجه

الصورة الإحداثية للمتجه  $\vec{AB}$  الذي نقطته بدايته

ونقطته نهايته  $A \langle x_1, y_1 \rangle$  و  $B \langle x_2, y_2 \rangle$  هي

$$\vec{B} - \vec{A} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

مثال 1 أوجد الصورة الإحداثية للمتجه  $\vec{AB}$

الذي بدايته  $A \langle 2, 4 \rangle$  ونهايته  $B \langle 3, -1 \rangle$

الحل النهاية - البداية  $\vec{AB} =$

$$\vec{AB} = \langle 3, -1 \rangle - \langle 2, 4 \rangle = \langle 1, -5 \rangle$$

## ② طول المتجه

طول المتجه  $\vec{AB} = \langle x, y \rangle$  هو

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال 2 أوجد طول المتجه  $\vec{v} = \langle 4, 3 \rangle$

الحل  $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

مثال 3 أوجد طول المتجه  $\vec{AB}$  الذي بدايته

$A \langle 2, 4 \rangle$  ونهايته  $B \langle 3, -1 \rangle$

$$\vec{AB} = \langle 3, -1 \rangle - \langle 2, 4 \rangle = \langle 1, -5 \rangle$$

الحل

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

## ③ متجه الوحدة

متجه الوحدة في اتجاه المتجه  $\vec{v}$  هو

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

مثال 5 وجد متجه وحدة في اتجاه  $\vec{v} = \langle 4, 3 \rangle$

$$\frac{\langle 4, 3 \rangle}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{\langle 4, 3 \rangle}{\sqrt{25}} = \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$$

الحل

مثال 11 أوجد زاوية اتجاه المتجه  $\vec{u} = \langle 4, 4 \rangle$

مع الاتجاه الموجب لمحور  $x$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{4} = \tan^{-1} 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

الحل

مثال 12 أوجد زاوية اتجاه المتجه  $\vec{u} = \langle -4, 4 \rangle$

مع الاتجاه الموجب لمحور  $x$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-4}{4} + 180 =$$

$$\theta = \tan^{-1} -1 + 180$$

$$\theta = -45 + 180 = 135^\circ$$

الحل

### ⑩ الإحداثيات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

كل القوانين السابقة تنطبق على المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

مثال 13 إذا كانت  $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$  و  $\vec{b} = \langle 1, 1, -2 \rangle$

أوجد  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \langle 1, 2, 3 \rangle \cdot \langle 1, 1, -2 \rangle \\ &= 1 + 2 + (-6) = -3 \end{aligned}$$

الحل

مثال 14 إذا كانت  $\vec{a} = \langle 1, -1, 4 \rangle$  و  $\vec{b} = \langle 0, 2, k \rangle$

أوجد قيمة  $k$  علماً بأن المتجهين متعامدان

حيث أن المتجهين متعامدان فإن

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\langle 1, -1, 4 \rangle \cdot \langle 0, 2, k \rangle = 0$$

$$0 - 2 + 4k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

الحل

مثال 15 أوجد قياس الزاوية بين المتجهين

$$\vec{u} = \langle 0, 1, 1 \rangle \text{ و } \vec{v} = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

$$\cos \theta = \frac{\langle 0, 1, 1 \rangle \cdot \langle 1, 0, 1 \rangle}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

الحل

عماد الجيزري

مؤلف كتاب المعاصر

مثال 8 إذا كان  $u, v$  متعامدان وكان

$$\vec{u} = \langle 3, k \rangle \text{ و } \vec{v} = \langle 1, 1 \rangle \text{ أوجد قيمة } k$$

الحل حيث أن المتجهين متعامدان فإن

$$\langle 3, k \rangle \cdot \langle 1, 1 \rangle = 0$$

$$3 + k = 0$$

$$k = -3$$

فإن

### ⑦ الصورة الإحداثية للمتجه

إذا علم طول المتجه  $\vec{v}$  والزاوية المحصورة بينه وبين محور  $x$  الموجب فإنه يمكن إيجاد الصورة الإحداثية له

$$(|\vec{v}| \cos \theta, |\vec{v}| \sin \theta)$$

مثال 9 أوجد الصورة الإحداثية للمتجه  $\vec{v}$  الذي طوله

6 وزاوية ميله مع محور  $x$  الموجب هو  $45^\circ$

$$\text{الحل الصورة الإحداثية} = \langle 6 \cos 45^\circ, 6 \sin 45^\circ \rangle$$

$$\langle 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle = \langle 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \rangle$$

### ⑧ الزاوية بين المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

مثال 10 أوجد الزاوية بين المتجهين

$$\vec{u} = \langle 1, 0 \rangle \text{ و } \vec{v} = \langle 1, 1 \rangle$$

$$\cos \theta = \frac{\langle 1, 0 \rangle \cdot \langle 1, 1 \rangle}{\sqrt{1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1} \sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 45^\circ$$

### ⑨ زاوية اتجاه المتجه

هي الزاوية بين المتجه ومحور  $x$  الموجب

زاوية اتجاه المتجه  $\vec{u} = \langle x, y \rangle$  هي

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

إذا كان المتجه في الربع الأول

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} + 180^\circ$$

إذا كان المتجه في الربع الثاني أو الثالث

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} + 360^\circ$$

إذا كان المتجه في الربع الرابع



## تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو



فيديو شرح التجميعات

٠٥٥٣٤٦٧٩٤٠

### تجميعات 1437

١ إذا كان المتجه  $u = \langle 1, -2 \rangle$ ,  $v = \langle 3, k \rangle$

متعامدين فما قيمة  $k$

- a)  $\frac{3}{2}$  b)  $\frac{2}{3}$  c)  $\frac{1}{4}$  d)  $\frac{3}{4}$

٢ أوجد الزاوية بين المتجهين  $u = \langle 1, 1 \rangle$ ,  $v = \langle 4, 0 \rangle$

- a) 60 b) 30 c) 45 d) 90

٣ إذا كانت زاوية المتجه  $v$  هو 210 وطوله 14 فإن

الصورة الاحداثية للمتجه هي

- a)  $\langle -7\sqrt{3}, -7 \rangle$  b)  $\langle 7, 7\sqrt{3} \rangle$  c)  $\langle 7, 7 \rangle$  d)  $\langle \sqrt{3}, 7 \rangle$

### تجميعات 1436

٤ أوجد متجه وحده في اتجاه المتجه  $u = \langle 3, 4 \rangle$

- a)  $\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$  b)  $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$  c)  $\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle$  d)  $\langle \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \rangle$

٥ إذا كان  $u = 4i + 3j - k$ ,  $v = 2i + 2j - 2k$

ضلعان متجاوران في متوازي الأضلاع، فما مساحة متوازي الأضلاع

- a) 6 b)  $\sqrt{50}$  c)  $\sqrt{56}$  d)  $\sqrt{71}$

### تجميعات 1435

٦ أوجد حاصل الضرب الاتجاهي  $u \times v$  للمتجهين

$u = \langle 1, -2, 0 \rangle$ ,  $v = \langle 4, 0, -1 \rangle$

- a)  $\langle 2, 1, 8 \rangle$  b)  $\langle 3, 4, 5 \rangle$  c)  $\langle 0, 1, 3 \rangle$  d)  $\langle -2, 1, -8 \rangle$

٧ إذا كان  $s = \langle 4, -3 \rangle$ ,  $t = \langle -6, 2 \rangle$  فأى ممايلي يمثل

$r$  حيث  $r = t - 2s$

- a)  $\langle -14, 8 \rangle$  b)  $\langle 14, 8 \rangle$  c)  $\langle 8, 14 \rangle$  d)  $\langle 6, 14 \rangle$

### مفاتيح الحل

7	6	5	4	3	2	1
a	a	c	a	a	c	a

عماد الجيزي

مؤلف كتاب المعاصر

## ١١ الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  و  $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

فإن الضرب الاتجاهي  $\vec{a} \times \vec{b}$  هو

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال 15 أوجد ناتج الضرب الاتجاهي للمتجهين

$\vec{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle$  و  $\vec{v} = \langle 5, 0, 1 \rangle$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} k$$

$$(-2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) i - (3 \cdot 1 - 5 \cdot 1) j + (3 \cdot 0 - 2 \cdot 5) k$$

$$= -2i + 2j - 10k$$

### ١٢ مساحة متوازي الأضلاع

مساحة سطح متوازي الذي فيه  $u, v$  ضلعان متجاوران

هي  $|u \times v|$

مثال 16 أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه

$u = 2i + 4j - 3k$ ,  $v = i - 5j + 3k$

متجهان متجاوران

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(12 - 15)i - (6 + 3)j + (-10 - 4)k$$

$$-3i - 9j - 14k$$

$$\sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$

$$= \sqrt{286}$$

تدريب أي ممايلي متجهان متعامدان

- a)  $\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle$  b)  $\langle 3, 4, 6 \rangle, \langle 6, 4, 3 \rangle$   
c)  $\langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 2, -4, 6 \rangle$  d)  $\langle 3, -5, 4 \rangle, \langle 6, 2, -2 \rangle$

تدريب ماهو قياس الزاوية بين المتجهين

$u = \langle -9, 0 \rangle, v = \langle -1, -1 \rangle$

- a) 90 b) 0 c) 45 d) 135



$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \frac{3^2 - 7(3) + 12}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

لا بد من التحليل لحذف العامل الصفري

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-4)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-4) =$$

$$3 - 4 = -1$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

لا بد أن نضرب في المرافق لحذف الجذر

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

❖ نهاية الدالة عند  $\infty$  و  $-\infty$

ملاحظات هامة

- ✓  $(\infty) = \infty$  أي عدد
- ✓  $(-\infty) = \infty$  عدد زوجي
- ✓  $(-\infty) = -\infty$  عدد فردي
- ✓  $(\infty) \times \text{عدد موجب} = \infty$
- ✓  $(\infty) \times \text{عدد سالب} = -\infty$

② نهاية الدالة كثيرة الحدود عند  $\infty$  و  $-\infty$

نعوض عن قيمة  $x$  في الحد ذو أعلى أس فقط

$$① \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = (\infty)^3 = \infty$$

$$② \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$③ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = (-\infty)^4 = \infty$$

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

## ① نهاية الدالة عند نقطة

خطوات إيجاد نهاية دالة عند نقطة  $c$

نعوض عن قيمة  $x$  بـ النقطة  $c$  فينتج أحد الحالات الآتية

① أن يكون الناتج عدد فيكون هو النهاية المطلوبة

② أن يكون الناتج  $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$  فيكون ليس لها نهاية

③ أن يكون الناتج  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  (كمية غير معينة) لذلك

يجب حذف العامل المتسبب في وجود الصفر بسيطاً ومقاماً

عن طريق التحليل - العامل المشترك - الضرب في المرافق

مثال 1 أوجد نهاية الدوال الآتية

$$① \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x - 5)$$

$$② \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2x+1}{x-2} \right)$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

الحل

$$① \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x - 5)$$

نعوض عن قيمة  $x$  بالعدد -1

$$= (-1)^2 + 3(-1) - 5 = -7$$

نعوض عن قيمة  $x$  بالعدد 2

$$② \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2x+1}{x-2} \right) = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 - 2} = \frac{5}{0}$$

الدالة ليست لها نهاية عندما  $x \rightarrow 2$

$$③ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{25 - 25}{5 - 5} = \frac{0}{0}$$

لا بد من التحليل لحذف العامل الصفري



$$2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 5}{5x^3 - 4}$$

وحيث أن درجة البسط = درجة المقام

$$\frac{7}{5} = \frac{\text{معامل أكبر أس}}{\text{معامل أكبر أس}}$$

$$3 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4x^3 + 8}{5x^2 + 2x}$$

وحيث أن أكبر أس في البسط فنعوض بقيمة x في الحد ذو أكبر أس ليصبح الناتج هو

$$-4(-\infty)^3 = \infty$$

$$4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - 3x + 5}{2x^4 - 4}$$

وحيث أن أكبر أس في البسط فنعوض بقيمة x في الحد ذو أكبر أس ليصبح الناتج هو

$$7(\infty)^5 = \infty$$

### تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

### فيديو شرح التجميعات

#### تجميعات 1437

$$1 \text{ ماقيمة } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

- a) 2      b) 4      c) 5      d) -4

#### تجميعات 1436

$$1 \text{ أوجد } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 - 12x}{5 - 2x^3 + 3x^2}$$

- a) 5      b) -5      c) 4      d) 10

$$2 \text{ ماقيمة } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 - \sqrt{x^2 + x + 16}}{x^3 - 1}$$

- a) 4      b) -1      c) 0      d) 16

### مفاتيح الحل

3	2	1
c	b	a

عماد الجيزري

مؤلف كتاب المعاصر

عند إيجاد نهاية الدالة كثيرة الحدود عند  $\infty$  أو  $-\infty$

نوجد النهاية للحد الأكبر أس فقط

أوجد النهاية الآتية

مثال 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 5x^4 + 4)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 5x^4 + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} -5(x)^4 = -5(\infty)^4 = -5(\infty) = -\infty$$

أوجد النهاية الآتية

مثال 3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 - 5x^4 + 4)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 - 5x^4 + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 = (-\infty)^7 = -\infty$$

3 نهاية الدالة الكسرية عند  $\infty$  و  $-\infty$

عند إيجاد نهاية الدالة الكسرية عند  $\infty$  و  $-\infty$

يكون الناتج أحد الحلول الآتية

1 إذا كان أكبر أس في المقام الناتج صفر

2 إذا كانت درجة البسط = درجة المقام فإن الناتج

معامل أكبر أس

معامل أكبر أس

3 إذا كان أكبر أس في البسط فنعوض بقيمة x في الحد

ذو أكبر أس

أوجد نهاية الدوال الآتية

مثال 4

$$1 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 4}{5x^4 - 3x^3 + 1}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 5}{5x^3 - 4}$$

$$3 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4x^3 + 8}{5x^2 + 2x}$$

$$4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - 3x + 5}{2x^4 - 4}$$

$$1 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 4}{5x^4 - 3x^3 + 1} = 0$$

الحل

لأن أكبر أس موجود في المقام

مشتقة دالة  $f$  بالنسبة لـ  $x$  يرمز لها بأحد الرموز الآتية

$$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$$

① مشتقة العدد الثابت = صفر

مثال 1 إذا كان  $f(x) = 5$  فإن  $f'(x) = 0$

② مشتقة  $x^n$  هو  $nx^{n-1}$

نزل الأس واطرح منه 1

مثال 2 أوجد مشتقة الدوال الآتية

①  $f(x) = 3x^4$

②  $f(x) = -2x^{-5}$

③  $f(x) = \frac{3}{x^4}$

④  $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$

الحل

①  $f'(x) = 3(4)x^3 = 12x^3$

②  $f'(x) = -2(-5)x^{-6} = 10x^{-6}$

③  $f'(x) = 3x^{-4} = 3(-4)x^{-5}$

$12x^{-5} = \frac{-12}{x^5}$

④  $f'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} = 2x^{-\frac{1}{2}}$

③ مشتقة مجموع و طرح دوال هو مشتقة كل دالة على حدى

مثال 3 أوجد مشتقة الدالة

$f(x) = 15x^2 - 5x + 7$  عندما  $x = 1$

الحل

$f'(x) = 30x - 5$

نعوض عن  $x$  بـ 1 ليصبح الناتج هو

$f'(1) = 30(1) - 5 = 25$

④ مشتقة حاصل ضرب دالتين هو

مشتقة الأولى  $\times$  الثانية + مشتقة الثانية  $\times$  الأولى

مثال 4 إذا كان  $f(x) = (5x - 4)(x^2 + 5)$

أوجد  $f'(-1)$

الحل  $f'(x) = 5(x^2 + 5) + 2x(5x - 4)$

$= 5x^2 + 25 + 10x^2 - 8x$

$= 15x^2 - 8x + 25$

$f'(-1) = 15(-1)^2 - 8(-1) + 25 = 48$

مثال 5 إذا كان  $f(x) = 3x^2(2x + 7)$  أوجد  $f'(x)$

الحل  $f'(x) = 6x(2x + 7) + 2(3x^2)$

$= 12x^2 + 42x + 6x^2 = 18x^2 + 42x$

⑤ مشتقة قسمة دالتين هو

$\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^2}$

مثال 6 أوجد مشتقة الدالة  $f(x) = \frac{7x}{5x-3}$

الحل  $f'(x) = \frac{7(5x-3) - 5(7x)}{(5x-3)^2}$

$= \frac{35x - 21 - 35x}{(5x-3)^2}$

$= \frac{-21}{(5x-3)^2}$

مثال 7 إذا كانت  $f(x) = \frac{3}{8x+2}$  أوجد  $f'(2)$

الحل  $f'(x) = \frac{0(8x+2) - 8(3)}{(8x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{-24}{(8x+2)^2}$

$f'(2) = \frac{-24}{(8 \cdot 2 + 2)^2} = \frac{-24}{27}$

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر



## تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

### فيديو شرح التجميعات

#### تجميعات 1437

١ أوجد مشتقة الدالة  $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

عندما  $x = 0$

- a) 3      b) -5      c) 7      d) 0

٢ إذا كان  $f(x) = \frac{5}{x+7}$  فإن  $f'(x)$  تساوي

- a)  $-\frac{5}{x}$       b)  $\frac{5}{x^2}$       c)  $-\frac{5}{(x+7)^2}$       d)  $\frac{5}{(x+7)^2}$

#### تجميعات 1436

٣ ماهي مشتقة الدالة  $g(x) = \sqrt[5]{x^9}$

- a)  $9\sqrt[5]{x^4}$       b)  $\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$       c)  $\sqrt[4]{x^9}$       d)  $\sqrt{x^4}$

٤ إذا كانت  $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

فإن  $f'(x)$  تساوي

- a)  $x^2$       b)  $x^4$       c)  $4x^3$       d)  $3x^4$

#### تجميعات 1435

٥ أوجد السرعة المتجه اللحظية للدالة

$$f(t) = 1 + 55t - 3t^3$$

- a)  $55 - 9t^2$       b)  $9t^2$       c)  $55t$       d) 1

٦ ماميل مماس المنحنى  $y = 2x^2$  عند النقطة  $(1, 2)$

- a) 4      b) 1      c) 8      d) 2

٧ مامشتقة  $h(x) = (-7x^2 + 4)(2 - x)$

- a)  $-14x$       b)  $14x$   
c)  $-12x^2 - 28x + 4$       d)  $21x^2 - 28x - 4$

### مفاتيح الحل

7	6	5	4	3	2	1
d	a	a	c	b	c	d

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

مثال 8 إذا كانت  $f(x) = kx^2 - 4x$  و  $f'(1) = 2$

أوجد قيمة  $k$

الحل

$$f'(x) = 2kx - 4$$

$$f'(1) = 2k(1) - 4 = 2$$

$$2k = 6 \rightarrow k = 3$$

مشتقة ما داخل  $\sqrt{\dots}$

٦ مشتقة دالة  $\sqrt{\dots}$  هو

أوجد مشتقة الدالة  $f(x) = \sqrt{3x+7}$

مثال 9

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+7}}$$

الحل

٧ السرعة اللحظية لجسم يتحرك عند اللحظة  $t$

هو مشتقة دالة المسافة عند تلك اللحظة

مثال 10 تعطى المسافة التي يتحركها جسم بالسنتيمترات

بعد  $t$  ثانية بالدالة

$$f(x) = 18t - 2t^2 - 1$$

أوجد معادلة السرعة اللحظية لهذا الجسم

الحل نوجد مشتقة دالة المسافة

أي أن معادلة السرعة اللحظية هي

$$f'(x) = 18 - 4t$$

٨ ميل المماس لمنحنى الدالة عند نقطة هو نفسه

المشتقة الأولى للدالة عند تلك النقطة

مثال 11 أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند  $(1, 0)$

$$y = 3x^2 - 1$$

الحل نوجد مشتقة الدالة  $y' = 6x$

ثم نعوض عن  $x$  النقطة في الدالة

$$y' = 2$$

٨ النقاط الحرجة هي نقطة عندها المشتقة الأولى للدالة

= صفر أو تكون غير معرفة

مثال 12 أوجد النقاط الحرجة للدالة  $y = x^2 - 6x$

الحل نوجد المشتقة الأولى للدالة  $y' = 2x - 6$

عند النقاط الحرجة تكون المشتقة = صفر

$$2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$$

## ٤ التكامل

الدالة  $p(x)$  هي دالة أصلية للدالة  $f(x)$

إذا كانت مشتقة  $p(x)$  هي  $f(x)$

مثال 1

إذا كانت  $f(x) = 3x^2$  فإن أحد دوالها الأصلية هي

- a)  $6x$     b)  $3x^2 - 6$     c)  $3x^2 + 1$     d)  $x^3$

**الحل** نبحث في الخيارات أي الدوال يكون مشتقتها

هو  $3x^2$  نجد أن الحل الصحيح هو  $x^3$  d)

① تكامل الدالة  $x^n$  هو نزيد الأس 1 ونقسم على الأس

الجديد + ثابت التكامل

مثال 2 أوجد ناتج  $\int 10x^4 dx$

**الحل**

$$\frac{10x^5}{5} + c = 2x^5 + c$$

مثال 3 أوجد ناتج  $\int \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2} dx$

**الحل**

$$\begin{aligned} &= \int \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} dx \\ &= \frac{5}{3} \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{5}{3} \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = x^{\frac{5}{3}} + c \\ &= \sqrt[3]{x^5} + c \end{aligned}$$

② تكامل العدد الثابت  $k$  هو  $kx$

مثال 4  $\int 5 dx = 5x + c$

③ تكامل مجموع وطرح دوال هو تكامل كل دالة على حدى

مثال 5  $\int (6x^5 + 4x^3 + 7) dx$

**الحل**

$$\begin{aligned} &= 6 \frac{x^6}{6} + 4 \frac{x^4}{4} + c \\ &= x^6 + x^4 + c \end{aligned}$$

## ④ التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

تكامل الدالة عادي ثم نعوض عن قيمة  $x$  بـ  $b$  ثم نعوض عن

قيمة  $x$  بـ  $a$  ونطرحهما

مثال 6 أوجد ناتج  $\int_1^2 3x^2 dx$

$$= \left( \frac{3x^3}{3} \right)_1^2 = (x^3)_1^2$$

$$(2^3) - (1^3) = 7$$

مثال 7  $\int_0^2 (4x^3 + 6x^2 - 5) dx$

$$= \left( 4 \frac{x^4}{4} + 6 \frac{x^3}{3} - 5x \right)_0^2 = (x^4 + 2x^3 - 5x)_0^2$$

$$(2^4 + 2(2)^3 - 5(2)) - (0^4 + 2(0)^3 - 5(0)) = 22$$

مثال 8

إذا كان  $\int_0^k (2x + 4) dx = 5$  أوجد قيمة  $k$

**الحل**

$$\left( 2 \frac{x^2}{2} + 4x \right)_0^k = 5$$

$$(k^2 + 4k) = 5$$

$$k^2 + 4k - 5 = 0$$

$$(k-5)(k+1) = 0$$

$$k = 5 \text{ أو } k = -1$$

لكن  $k = -1$  مرفوضة لأن قيمة  $k$  لابد أن تكون أكبر من صفر في حدود التكامل

تدريب إذا كان  $\int_0^2 kx dx = 6$  فما قيمة  $k$

- a) 1    b) 2    c) 3    d) 4



فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1437

أوجد قيمة المقدار

$$\int_2^6 \frac{x^2}{x^2-1} dx - \int_2^6 \frac{1}{x^2-1} dx + \int_2^6 \frac{1}{2} dx$$

- a) 6      b) 4      c) 2x      d) 0

تجميعات 1436

أوجد قيمة  $k$  إذا كانت  $\int_1^k (x^2 + 5x) dx = 0$

- a) 0      b) 1      c) 2      d) 5

تجميعات 1435

أوجد قيمة  $\int_2^5 \sqrt{x^3} dx$

- a)  $\sqrt{x^5} + c$       b)  $\sqrt{x^2}$       c)  $\sqrt[3]{x}$       d)  $5x$

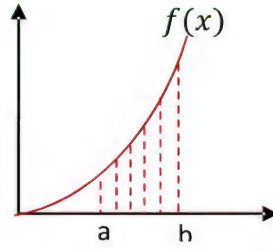
ما هي الدالة الأصلية للدالة  $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

- a)  $x^2$       b)  $\frac{1}{x}$   
c)  $x + \frac{1}{x}$       d)  $x - \frac{1}{x}$

مفاتيح الحل

4	3	2	1
d	a	b	a

المساحة تحت المنحنى



مساحة المنطقة المظللة

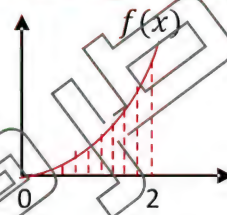
تحت منحنى الدالة  $f(x)$

هو

$$\int_a^b f(x) dx$$

حيث  $a, b$  هي حدود المنطقة المظللة

مثال 9 أوجد مساحة المنطقة المظللة في الرسم حيث



$$f(x) = x^2$$

في  $[0, 2]$

الحل مساحة المنطقة المظللة هي  $\int_0^2 f(x) dx$

$$\int_0^2 x^2 dx = \left( \frac{x^3}{3} \right) = \left( \frac{2^3}{3} \right) - (0) = \frac{8}{3}$$

مثال 10 أوجد قيمة التكامل

$$\int_3^4 \sqrt{x^2 - 4x + 4} dx$$

الحل

المقدار  $x^2 - 4x + 4$  هو نفسه  $(x - 2)^2$

وبالتالي يصبح المقدار المطلوب هو

$$\int_3^4 \sqrt{(x-2)^2} dx = \int_3^4 (x-2) dx = \left( \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_3^4 = \left( \frac{16}{2} - 8 \right) - \left( \frac{9}{2} - 6 \right) = \frac{3}{2}$$

ملحوظة هامة  $\int_a^a f(x) dx = 0$

مثال 11 أوجد قيمة  $k$  إذا كان  $\int_1^k (x^3 + 4x) dx = 0$

الحل معنى أن التكامل = 0 فإن  $k = 1$

## ٥ حساب المثلثات

### ٢ الدوال المثلثية للزوايا 30° و 45° و 60°



$$\begin{array}{cc} \cos \theta & \sin \theta \\ \downarrow & \downarrow \\ 30^\circ = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ 60^\circ = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ 45^\circ = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \uparrow & \uparrow \\ & \tan \theta \end{array}$$

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$, \tan 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

مثلاً

ملحوظة

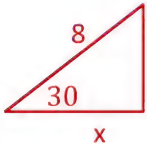
يجب حفظ الدوال المثلثية للزوايا الخاصة بطريقة

عكسية

مثلاً

$$\theta = 60^\circ \quad \text{إذا كان } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ فإن}$$

$$\theta = 45^\circ \quad \text{إذا كان } \tan \theta = 1 \text{ فإن}$$



مثال 3 أوجد قيمة x

الحل يمكن استعمال دالة الـ cos لوجود المجاور

$$\cos 30 = \frac{x}{8}$$

$$x = 8 \cos 30 = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

مثال 4 من نقطة تبعد 100 m عن قاعدة برج وجد

أن زاوية إرتفاع البرج هو 60 فما هو إرتفاع البرج

الحل

يمكن استعمال دالة الـ tan

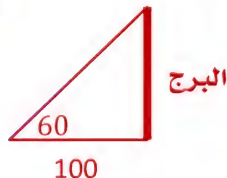
$$\tan 60 = \frac{\text{البرج}}{100}$$

$$100 \tan 60 = \text{البرج}$$

$$100\sqrt{3} = \text{البرج}$$

عماد الجزيرة

مؤلف كتاب المعاصر

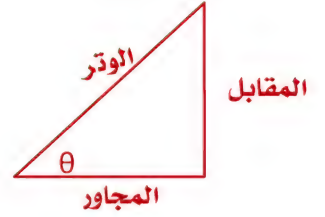


### ١ الدوال المثلثية في المثلث القائم

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$



مقلوب الـ sin theta هو csc theta

مقلوب الـ cos theta هو sec theta

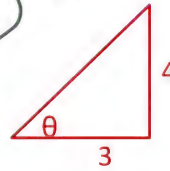
مقلوب الـ tan theta هو cot theta

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

ملحوظة

في أي مثلث قائم إذا علم طول ضلعين فيجب تعيين الضلع الثالث باستخدام نظرية فيثاغورث

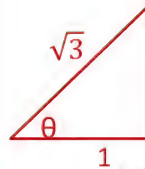
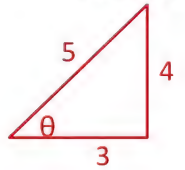


مثال 1 أوجد cos theta في المثلث

الحل لابد من إيجاد الضلع الثالث للمثلث بنظرية

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$



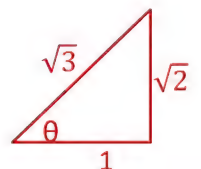
مثال 2 من الرسم أوجد cot theta

الحل لابد من إيجاد الضلع الثالث للمثلث

$$\sqrt{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$





### ٥ الدورة والسعة للدوال المثلثية

❖ إذا كانت الدالة في الصورة  $y = a \sin bx$

فإن السعة هي  $a$  وطول الدورة هو  $\frac{360}{|b|}$

❖ إذا كانت الدالة في الصورة  $y = a \cos bx$

فإن السعة هي  $a$  وطول الدورة هو  $\frac{360}{|b|}$

❖ إذا كانت الدالة في الصورة  $y = a \tan bx$

ليس لها سعة وطول الدورة هو  $\frac{180}{|b|}$

مثال 11 أوجد السعة وطول الدورة للدالة

$$y = 5 \sin 3\theta$$

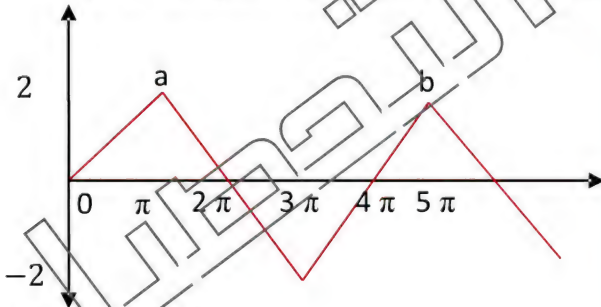
**الحل** السعة هي 5 وطول الدورة هو  $\frac{360}{3} = 120$

مثال 12 أوجد السعة وطول الدورة للدالة

$$y = 5 \tan 3\theta$$

**الحل** الدالة ليس لها سعة وطول الدورة هو  $\frac{180}{4} = 45^\circ$

مثال 13 أوجد السعة وطول الدورة من الرسم



**الحل** طول الدورة على الرسم هو المسافة على محور  $x$

لأي نقطة تحركت دورة كاملة مثل النقطة  $a$

فهي تحركت من أعلى إلى أسفل وعادت إلى نفس

المكان عند  $b$  وتكون المسافة على محور  $x$  هي

ابتداءً من  $\pi$  إلى  $5\pi$  وتكون قيمتها  $4\pi = 5\pi - \pi$

السعة هي أقصى مسافة للدالة على محور  $y$  ويتضح من

الرسم أنها 2

### ٣ التحويل من الستيني إلى الدائري والعكس

للتحويل من الستيني للدائري نضرب الزاوية في  $\frac{\pi}{180}$

للتحويل من الدائري إلى الستيني نضرب في  $\frac{180}{\pi}$

مثال 5 ماهو قياس الزاوية 270 بالتقدير الدائري

$$270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \quad \text{الحل}$$

مثال 6 ماهو قياس  $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$  بالقياس الستيني

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{180}{\pi} = 90^\circ \quad \text{الحل}$$

### ٤ الزاوية المرجعية

■ هي الزاوية الحادة التي تزيد عن 180 أو تنقص عن

180 أو تنقص عن 360

■ الزاوية المرجعية لزاوية حادة هي نفسها

■ إذا كانت الزاوية سالبة فنضيف عليها 360 ونوجد

المرجعية للزاوية الناتجة

مثال 7 ماهي الزاوية المرجعية للزاوية  $240^\circ$

**الحل** الزاوية 240 تزيد عن 180 بقيمة 60

فتكون المرجعية هي 60

مثال 8 ماهي قياس الزاوية المرجعية للزاوية -60

**الحل** نضيف 360 إلى -60 لتصبح الزاوية هي

300 وحيث أن 300 تنقص عن 360 بمقدار 60 فإن

المرجعية هي 60

مثال 9 أوجد قيمة  $\sin 150$

**الحل** نوجد المرجعية لـ 150 وهي 30

$$\sin 150 = +\sin 30 = \frac{1}{2}$$

ونختار الإشارة + لأن الزاوية 150 تقع في الربع الثاني

وتكون الـ  $\sin$  موجبة

مثال 10 أوجد قيمة  $\cos 120$

**الحل** نوجد المرجعية لـ 120 وهي 60

$$\cos 120 = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

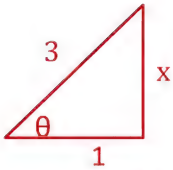
ونختار الإشارة السالبة لأن الزاوية 120 تقع في الربع الثاني

وتكون فيها  $\cos \theta$  سالبة

## ٧ الدوال المثلثية لضعف الزاوية

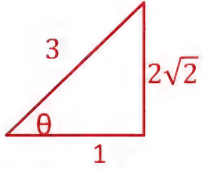
- $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
- $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

مثال 16 إذا كان  $\cos \theta = \frac{-1}{3}$  وكان  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  أوجد  $\sin 2\theta$



**الحل** نصنع مثلث قائم ونكمل أضلاعه

$$x = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



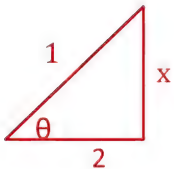
$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

وحيث أن  $\theta$  تقع في الربع الثاني

فإن دالة  $\sin$  موجبة لكن  $\cos$  سالب

$$= 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{-1}{3} = \frac{-4\sqrt{2}}{9}$$

مثال 17 إذا كان  $\tan \theta = -2$  وكان  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  أوجد  $\cos 2\theta$



**الحل** نصنع مثلث قائم ونكمل أضلاعه

$$x = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

وحيث أن  $\theta$  تقع في الربع الرابع

فإن  $\cos$  فقط موجب

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

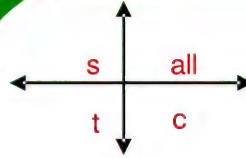
$$\cos 2\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{-3}{5}$$



عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

## ٦ اشارة الدوال المثلثية



- في الربع الأول جميع الدوال المثلثية موجبة
- في الربع الثاني  $\sin$  ومقلوبها فقط موجب
- في الربع الثالث  $\tan$  ومقلوبها فقط موجب
- في الربع الرابع  $\cos$  ومقلوبها فقط موجب

مثال 14 إذا كانت  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$  و  $\tan \theta = -3$  فما هو الربع الذي تقع فيه زاوية  $\theta$

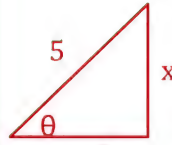
**الحل** حيث أن  $\cos$  موجبة فإن  $\theta$  تقع في الربع الأول أو الرابع

وحيث أن  $\tan$  سالبة فإن  $\theta$  تقع في الربع الثاني أو الرابع وبذلك تصبح الدالتين مشتركتين في الربع الرابع لذلك فإن  $\theta$  تقع في الربع الرابع

### ملحوظة

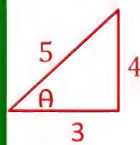
إذا علمت دالة مثلثية واحدة فإنه يمكن إيجاد باقي الدوال المثلثية عن طريق عمل مثلث فيثاغورث وإكمال باقي أضلاعه مع مراعاة الربع الواقعة فيه الزاوية

مثال 15 إذا كان  $\cos \theta = \frac{-3}{5}$  ،  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  أوجد  $\tan \theta$



**الحل**

من فيثاغورث الضلع الثالث في المثلث هو 4



من المثلث  $\tan \theta = \frac{4}{3}$  ولكن

$\theta$  تقع في الربع الثاني أي تكون  $\tan$  سالبة

لذلك تصبح  $\tan \theta = \frac{-4}{3}$



## ١٠ الدوال المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$   
نفس الإشارة بين الزاويتين
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$   
نفس الإشارة بين الزاويتين
- $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$   
في البسط نفس الإشارة وفي المقام عكس الإشارة

يمكن استخدام هذه القوانين في إيجاد قيمة بعض الزوايا بدون الآلة الحاسبة  
مثل الزوايا 15 ، 75 ، 105

مثال 20 أوجد قيمة  $\sin 75$

- a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     b)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$     c)  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$     d)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\begin{aligned} \sin 75 &= \sin(45 + 30) = \\ &= \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

مثال 21 أوجد قيمة  $\cos 15$

- a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     b)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$     c)  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$     d)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\begin{aligned} \cos(60 - 45) &= \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$



عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

## ٨ خصائص هامة للدوال المثلثية

- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
  - $\cos(-\theta) = +\cos\theta$
  - $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
- 180 ، 360 زوايا تثبت الدالة المثلثية مع مراعاة إشارة

الربع الواقعة فيها الزاوية الأصلية

$$\sin(180 - \theta) = +\sin\theta$$

مثلاً

نختار الإشارة الموجبة لأن  $180 - \theta$  تقع في الربع الثاني وتكون  $\sin$  موجبة

$$\cos(180 + \theta) = -\cos\theta$$

مثلاً

نختار الإشارة السالبة لأن  $180 + \theta$  تقع في الربع الثالث وتكون  $\cos$  سالبة

مثال 18 أوجد قيمة  $\tan(180 - \theta)$

- a)  $\tan\theta$     b)  $-\tan\theta$     c)  $\cot\theta$     d)  $-\cot\theta$

الحل 180 زاوية تثبت الدالة أي أن الناتج هو  $\tan$  وحيث أن  $180 - \theta$  ربع ثاني فتكون الإشارة سالبة وبذلك يصبح الحل هو b

90 ، 270 زوايا تغير الدالة المثلثية

$$\sin \rightarrow \cos, \tan \rightarrow \cot, \sec \rightarrow \csc$$

والعكس صحيح

مع مراعاة إشارة الربع الواقعة فيها الزاوية الأصلية

$$\cos(90 + \theta) = -\sin\theta$$

مثلاً

نختار الإشارة السالبة لأن  $90 + \theta$  تقع في الربع الثاني وتكون  $\cos$  سالبة

مثال 19 أوجد قيمة  $\cos(90 - \theta)$

- a)  $\sin\theta$     b)  $-\sin\theta$     c)  $\cos\theta$     d)  $\sec\theta$

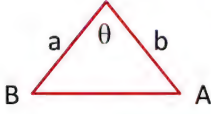
الحل 90 زاوية تغير الدالة تجعل الـ  $\cos$  تصبح  $\sin$  وحيث أن الزاوية ربع أول فنختار الإشارة الموجبة

وبذلك تصبح الإجابة هي  $\sin\theta$  a)

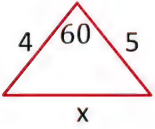
### ١٣ قانون جيب التمام

يستخدم قانون جيب التمام لإيجاد طول ضلع بشرط

وجود ضلعين والزاوية المحصورة



$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \cos \theta}$$



مثال 24 أوجد طول الضلع x

$$x = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos 60}$$

$$x = \sqrt{16 + 25 - 20}$$

$$x = \sqrt{21}$$

### ١٤ حل المعادلات المثلثية

هو إيجاد كل قيم  $\theta$  التي تحقق المعادلة

مثال 25 حل المعادلة  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  حيث  $0 \leq \theta \leq 360$

الحل نبحث عن الزاوية التي قيمته  $\sin$  لها هي  $\frac{1}{2}$  نجد

أنها 30

وحيث أن  $\sin$  موجبة في الربعين الأول والثاني لذلك

$$\theta = 30$$

$$\theta = 180 - 30 = 150$$

وتكون مجموعة الحل هي  $\{30, 150\}$

مثال 26 حل المعادلة  $\cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$  حيث  $0 \leq \theta \leq 360$

الحل نبحث عن الزاوية التي قيمته  $\cos$  لها هي  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

نجد أنها 30

وحيث أن  $\cos$  سالبة في الربعين الثالث والثاني لذلك

$$\theta = 180 - 30 = 150$$

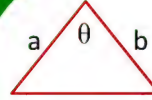
$$\theta = 180 + 30 = 210$$

وتكون مجموعة الحل هي  $\{210, 150\}$

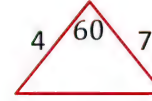
عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

### ١١ مساحة المثلث



حاصل ضرب أي ضلعين  $\times \sin$  الزاوية بينهما  $\frac{1}{2} =$

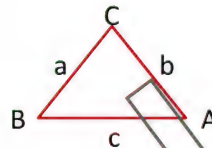


مثال 21 احسب مساحة المثلث

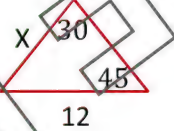
$$\frac{1}{2} \times 4 \times 7 \sin 60 = 2 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$

### ١٢ قانون الجيب

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



مثال 22 أوجد قيمة x من الرسم

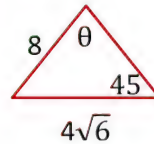


$$\frac{x}{\sin 45} = \frac{12}{\sin 30}$$

$$x = \frac{12 \sin 45}{\sin 30}$$

$$x = \frac{12 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 12\sqrt{2}$$

الحل



مثال 23 أوجد قيمة  $\theta$

$$\frac{4\sqrt{6}}{\sin \theta} = \frac{8}{\sin 45}$$

$$\sin \theta = \frac{4\sqrt{6} \sin 45}{8} = \frac{4\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{8}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 60^\circ$$

الحل



## ١٥ معكوس الدالة المثلثية

- $\arcsin \theta = \sin^{-1} \theta$
- $\arccos \theta = \cos^{-1} \theta$
- $\arctan \theta = \tan^{-1} \theta$

مثال 27 مقيمة  $\sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$

**الحل** نبحث عن الزاوية التي قيمته  $\sin$  لها هي  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
نجد أنها الزاوية 45

مثال 28 مقيمة  $\cos(\cos^{-1} \frac{1}{2})$

**الحل** أولاً نعين قيمة  $\cos^{-1} \frac{1}{2}$  أي نبحث عن الزاوية التي قيمته  $\cos$  لها هو  $\frac{1}{2}$  نجد أنها 60  
ثانياً نعين قيمة  $\cos 60$  وهي  $\frac{1}{2}$

## ١٦ المتطابقات المثلثية

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \quad 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta \quad \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\csc^2 \theta - 1 = \cot^2 \theta \quad \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

تستخدم المتطابقات السابقة في تبسيط العبارات المثلثية كما يتضح من الأمثلة التالية

## لتبسيط العبارات المثلثية نتبع الخطوات الآتية

- ١ محاولة جعل الدوال المثلثية  $\sin$  و  $\cos$
- ٢ نستخدم أحد قوانين المتطابقات السابقة
- ٣ نفكر في التحليل - العامل المشترك - توحيد المقامات

مثال 29 تبسيط العبارة  $\frac{\sec \theta}{\csc \theta}$

$$a) \sin \theta \quad b) \tan \theta \quad c) \cot \theta \quad d) \sec \theta$$

**الحل** حيث أن  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$   $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$   
ويصبح المقدار  $\frac{\sec \theta}{\csc \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \div \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{\sin \theta}{1} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$

مثال 30 العبارة التي تكافئ  $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$

$$a) \sin \theta \quad b) \tan^2 \theta \quad c) \cot^2 \theta \quad d) \sec^2 \theta$$

**الحل** حيث أن  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$   $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$   
ويصبح المقدار  $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta \frac{1}{\sin \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta$

مثال 31 تبسيط العبارة  $\frac{\sec \theta}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta)$

$$a) \tan \theta \quad b) \tan^2 \theta \quad c) \cos 2\theta \quad d) \sec^2 \theta$$

**الحل** حيث أن  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$  و  $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$   
يصبح المقدار  $\frac{\sec \theta}{\sin \theta} (\sin^2 \theta) = \frac{1}{\cos \theta} \times \sin \theta = \tan \theta$

مثال 32 تبسيط العبارة  $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$

$$a) \sin 2\theta \quad b) \tan^2 \theta \quad c) \cos 2\theta \quad d) \sec^2 \theta$$

**الحل** نقوم بتحليل المقدار  $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$   
وحيث أن  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  و  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$   
 $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = 1 \times \cos 2\theta = \cos 2\theta$   
عماد الجزيري



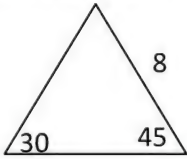
فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1436

١ إذا كان  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$  حيث  $0 < \theta < 90$  فإن  $\sin 2\theta$  يساوي

- a)  $\frac{24}{25}$  b)  $\frac{-24}{25}$  c)  $\frac{-2}{5}$  d)  $\frac{4}{5}$

٢ من خلال المثلث المقابل أوجد طول الضلع المقابل للزاوية 45



- a)  $8\sqrt{2}$  b)  $2\sqrt{3}$  c)  $8\sqrt{3}$  d) 16

تجميعات 1435

١ أي الدوال الآتية سعتها 3 وطول دورتها 72

- a)  $y = 3 \cos 5\theta$  b)  $y = 5 \cos 3\theta$   
c)  $y = 3 \tan 5\theta$  d)  $y = \cos 3\theta$

٢ أي مما يلي يكافئ

$$\tan^2 \theta (\cot^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

- a)  $\sin^2 \theta$  b)  $\cos^2 \theta$  c)  $\tan^2 \theta$  d)  $\cot^2 \theta$

٣ أي مما يلي لا يكافئ

$$\frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

- a)  $\cot \theta \sin \theta$  b)  $\frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$   
c)  $\tan \theta \csc \theta$  d)  $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$

٤ ماقيمة

$$\sin(60 + \theta) \cos \theta - \cos(60 + \theta) \sin \theta$$

- a)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\sqrt{3}$  d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

تجميعات 1437

١ إذا كان  $\sin \theta = \frac{-1}{2}$  و  $180 \leq \theta \leq 270$  أوجد  $\theta$

- a) 30 b) 45 c) 60 d) 210

٢ ماقيمة  $\sin 150$

- a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  d) 1

٣ إذا كان  $\sin x = \cos 50$  أوجد قيمة  $x$

- a) 40 b) 50 c) 10 d) 90

٤ أوجد قيمة  $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta$

- a)  $\cos 2\theta$  b)  $-\cos 2\theta$  c)  $\sin \theta$  d)  $\cos \theta$

٥ ماقيمة  $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$

- a) 1 b) -1 c)  $\cot \theta$  d)  $\tan \theta$

٦ ماقيمة  $\sin 15$

- a)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  b)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$  c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  d)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

تجميعات 1436

٧ ماقيمة

$$\sin(60 + \theta) \cos \theta - \cos(60 + \theta) \sin \theta$$

- a) 1 b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

٨ إذا كان  $\sin^{-1} \cos \theta = \frac{\pi}{6}$  و  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  أوجد قيمة  $\theta$

- a) 30 b) 60 c) 45 d) 120

مفاتيح الحل

14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
d	c	b	a	a	a	b	d	a	a	b	a	a	d



# ٦ الأسس و اللوغاريتمات

## ١ المعادلة الأسية

إذا كان الأساس = الأساس فإن الأس = الأس

مثال 1 إذا كان  $3^{x-1} = 27$  فإن قيمة  $x$  هي

- a) 3 b) -4 c) 5 d) 6

الحل

حيث أن  $27 = 3^3$  فإن  $3^{x-1} = 3^3$   
الأساس = الأساس فإن  
أي أن  $x - 1 = 3$   
 $x = 4$

مثال 2 إذا كان  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 32$  فإن قيمة  $x$  هي

- a) 3 b) -4 c) 5 d) 6

الحل حيث أن  $32 = 2^5$  فإن المقدار يصبح

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^5 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$   
الأساس = الأساس فإن  
أي أن  $x - 1 = -5$   
 $x = -4$

## ٢ المتباينة الأسية

إذا كان  $b^x > b^y$  فإن  $x > y$  بشرط  $b$  أكبر من 1

إذا كان  $b^x > b^y$  فإن  $x < y$  بشرط  $b$  أصغر من 1

مثال 3 إذا كان  $3^x \leq 9$  فإن قيمة  $x$  هي

- a)  $x \leq 9$  b)  $x \leq 2$  c)  $x \geq 2$  d)  $x = 3$

الحل

$3^x \leq 9 \rightarrow 3^x \leq 3^2$   
 $x \leq 2$

مثال 4 إذا كان  $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 125$  فإن قيمة  $x$  هي

- a)  $x \leq 5$  b)  $x \leq -3$  c)  $x \geq -3$  d)  $x = 3$

الحل

$\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 5^3 \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$   
 $x \geq -3$

تدريب أي مما يلي هو حلاً للمعادلة

$$27 \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$$

- a) -4 b) -2 c) 2 d) 4

## ٢ التحويل من الأسية إلى اللوغارتمية و العكس

✓ التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغارتمية

إذا كان  $b^y = x$  فإن  $\log_b x = y$

مثال 5 الصورة اللوغارتمية المكافئة للصورة

$2^5 = 32$  هي .....

الحل الصورة اللوغارتمية  $\log_2 32 = 5$

✓ التحويل من الصورة اللوغارتمية إلى الصورة الأسية

إذا كان  $\log_b x = y$  فإن  $b^y = x$

مثال 6 الصورة الأسية المكافئة للصورة

$$\log_2 8 = 3$$

الحل الصورة الأسية  $2^3 = 8$

## ٣ خصائص اللوغاريتمات

مهما كانت قيمة  $b$

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^x = x$
- $\log_b x^y = y \log_b x$
- $\log 10 = 1$

عند عدم وجود أساس فتعتبره 10

مثال 7 أوجد قيمة اللوغاريتمات الآتية

- ①  $\log 1000$
- ②  $\log 0.01$
- ③  $\log_4 64$

الحل

①  $\log 1000 = \log 10^3 = 3$

②  $\log 0.01 = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$

③  $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

عماد الجيزري

مؤلف كتاب المعاصر

مثال 11 حل المعادلة  $\log_4 x = \log_4 3 + \log_4 5$

الحل نستخدم قانون جمع اللوغاريتمات

$$\log_4 x = \log_4 (3 \times 5)$$

نحذف اللوغاريتم من الطرفين لينتج

$$x = 15$$

مثال 12 حل المعادلة  $\log_5 x = 2 \log_5 3 - \log_5 2$

الحل  $\log_2 x = \log_2 3^2 - \log_2 2$

$$\log_2 x = \log_2 \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{9}{2} = 4,5$$

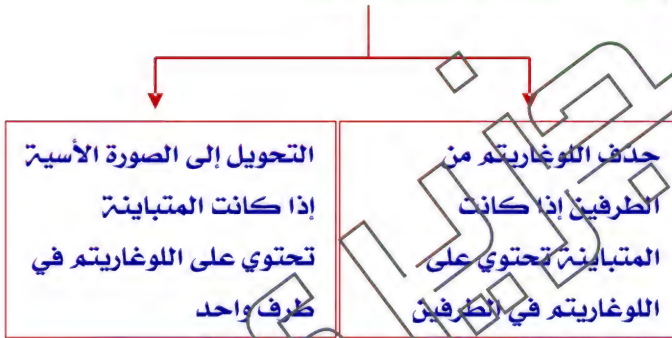
مثال 13 حل المعادلة  $\log_3 x = 2$

الحل لابد من التحويل إلى الصورة الأسية

$$3^2 = x$$

$$x = 9$$

٦ حل المتباينة اللوغارتمية



مثال 14 حل المتباينة  $\log_2 x > 3$

الحل حيث أن اللوغاريتم في طرف واحد نحول إلى أسية

$$x > 2^3 \rightarrow x > 8$$

مثال 15 حل المتباينة  $\log_4 x \leq \log_4 12 - \log_4 6$

الحل نستخدم قانون طرح اللوغاريتمات

$$\log_4 x \leq \log_4 \frac{12}{6}$$

نحذف اللوغاريتمات من الطرفين

$$x \leq 2$$

وحيث أن مجال اللوغاريتم هو

$$x > 0$$

$$2 \geq x > 0$$

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

٤ جمع اللوغاريتمات

$$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$$

2 لوغ جمع = لوغ واحد ضرب

مثال 8 أوجد قيمة  $\log_{27} 3 + \log_{27} 9$

الحل نطبق قانون جمع اللوغاريتمات

$$\log_{27} 3 + \log_{27} 9 = \log_{27} (3 \times 9)$$

$$\log_{27} 27 = 1$$

٥ طرح اللوغاريتمات

$$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$$

2 لوغ طرح = لوغ واحد قسمة

مثال 9 أوجد قيمة  $\log_5 100 - \log_5 4$

الحل

$$\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4}$$

$$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

مثال 10 إذا كان  $\log_2 3 = 1,5849$  و  $\log_2 5 = 2,3219$

أوجد قيمة  $\log_2 45$  ،  $\log_2 \frac{25}{9}$

الحل نحاول تحليل العدد 45 إلى 5 و 3 نجد أن

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$

$$\log_2 45 = \log_2 3 \times 3 \times 5 =$$

نستخدم قانون جمع اللوغاريتمات ثم نعوض

$$\log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 5 = 1,5849 + 1,5849 + 2,3219 = 5,4917$$

$$\log_2 \frac{25}{9} = \log_2 25 - \log_2 9$$

$$\log_2 5^2 - \log_2 3^2 = 2 \log_2 5 - 2 \log_2 3$$

$$= 2(2,3219) - 2(1,5849) = 1,474$$

٦ طرق حل المعادلات اللوغارتمية







فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1436

١ إذا كان  $3^{x+2} \geq 9$  فأى الأتي صحيح

- a)  $x \geq 5$  b)  $x \geq 1$  c)  $x \geq 0$  d)  $x \leq 1$

٢ ماهى الصورة المختصرة للمقدار

$$3 \log_5 x - 4 \log_5 y + 2 \log_5 z$$

- a)  $\log_5 \frac{x^3 z^2}{y^4}$  b)  $\frac{x^3 z^2}{y^4}$   
c)  $\log_5 \frac{x^2 y^4}{z^2}$  d)  $\log_5 x^3 y^4 z^2$

٣ إذا كان

$$\log_2 \frac{25}{9} \text{ أوجد قيمة } \log_2 5 = a \text{ و } \log_2 3 = b$$

- a)  $\frac{a^2}{b^2}$  b)  $\frac{2a}{b}$  c)  $\frac{b}{a}$  d)  $2(a-b)$

تجميعات 1435

١ ماقيمة  $x$  في المعادلة  $\log_8 16 = x$

- a) 2 b)  $\frac{4}{3}$  c)  $\frac{3}{4}$  d)  $\frac{1}{2}$

٢ ماقيمة  $\log_2 \frac{1}{32}$

- a) -5 b)  $-\frac{1}{5}$  c)  $\frac{1}{5}$  d) 5

٣ حل المعادلة  $\log_2(x^2 - 4) = \log_2 3x$  هو

- a) 4 b) 2 c) -1 d) -2

٤ مامقطع  $y$  للدالة  $y = 4^x - 1$

- a) 4 b) 1 c) -1 d) 0

تجميعات 1437

١ مانتاج المقدار

$$\log_5(x+1) + \log_5 x - 2 \log_5(x+1)$$

- a)  $\log_5 \frac{x}{x+1}$  b)  $\log_5 x$   
c)  $\log_5 \frac{x+1}{x}$  d)  $\log_5 x^2$

٢ وجد قيمة  $\log_2(\log x^{24}) - \log_2(\log x^3)$

- a)  $\log_2 x$  b)  $\log_2 x^{21}$  c) 3 d) 1

٣ إذا كان  $\log_4 5 = 1,16$  فإن  $\log_4 100$  هو

- a) 3,32 b) 4 c) 25 d) 2,32

٤ أوجد قيمة  $3 \log_3 9 - \log_5 \frac{1}{25}$

- a) 8 b) 6 c) 5 d) 9

٥ أوجد قيمة  $\log_6 \sqrt[3]{36}$

- a)  $\frac{2}{3}$  b)  $\frac{1}{3}$  c) 1 d) 6

٦ أوجد حل المعادلة

$$2 \log_5 x = \log_5 27 + \log_5 3$$

- a) 3 b) 9 c) -9 d) 2

٧ مانتاج  $\log_2 x + 5 \log_2 y - 3 \log_2 z$

- a)  $15 \log_2 xy$  b)  $\log \frac{xy}{z}$  c) 2 d)  $\log_2 \frac{xy^5}{z^3}$

٨ إذا كانت  $3^{x-1} = 27$  فإن قيمة  $x$  هي

- a)  $x = 4$  b)  $x = 3$  c)  $x = 1$  d)  $x = 1$

مفاتيح الحل

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
d	a	a	b	d	b	c	a	d	b	a	a	a	c	a



### ٤ ضرب المصفوفات

يمكن ضرب المصفوفات بشرط  
عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

مثلاً

$A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 1}$  الضرب ممكن لأن أعمدة الأولى 3  
وصفوف الثانية 3

وتكون المصفوفة الناتجة من رتبة  $2 \times 1$

$A_{2 \times 3} \times B_{2 \times 1}$  الضرب غير ممكن لأن أعمدة  
الأولى 3 وصفوف الثانية 2

مثال 3 أوجد ناتج  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

الحل أولاً يتم ضرب الصف الأول في العمود الأول

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 + 3 \times 0 & 2 \times 2 + 3 \times 1 \\ xxxxx & xxxxx \end{bmatrix}$$

يتم ضرب الصف الأول في العمود الثاني

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 + 3 \times 0 & 2 \times 2 + 3 \times 1 \\ xxxxx & xxxxx \end{bmatrix}$$

بالمثل يتم ضرب الصف الثاني في العمود الأول

ثم الصف الثاني في العمود الثاني

$$\begin{bmatrix} 2 \times 3 + 3 \times 0 & 2 \times 2 + 3 \times 1 \\ -1 \times 3 + 5 \times 0 & -1 \times 2 + 5 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

### ١ رتبة المصفوفة و عناصرها

رتبة المصفوفة عدد الصفوف  $m \times$  عدد الأعمدة  $n$

عنصر المصفوفة يتم تحديده برقم الصف ثم رقم العمود

مثلاً رتبة المصفوفة  $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

هو  $2 \times 3$  لأن عدد الصفوف 2 وعدد الأعمدة 3

العنصر  $a_{23}$  يعنى العنصر الموجود في الصف الثاني

والعمود الثالث فيصبح  $a_{23} = 4$

### ٢ تساوي مصفوفتين

عند تساوي مصفوفتين فإن العناصر المتناظرة متساوية

مثال 1 أوجد قيمتي  $x, y$   $\begin{bmatrix} 3 & x-4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & y+1 \end{bmatrix}$

الحل كل العناصر المتناظرة متساوية

$$x - 4 = 5 \rightarrow x = 9$$

$$y + 1 = -2 \rightarrow y = -3$$

### ٣ جمع وطرح المصفوفات

عند جمع أو (طرح) المصفوفات من نفس الرتبة لا بد

من جمع أو (طرح) العناصر المتناظرة

عند ضرب عدد في مصفوفة يتم ضربه في جميع

عناصرها

مثال 2 أوجد ناتج  $2 \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

الحل يتم ضرب 2 في جميع عناصر المصفوفة الأولى

ويتم ضرب 3- في جميع عناصر المصفوفة الثانية

$$\begin{bmatrix} -10 & 12 \\ 6 & 4 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -12 & 0 \\ 9 & -24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 15 \\ -6 & 4 \\ 1 & -22 \end{bmatrix}$$



## مجموع الأقطار الفرعية

$$(1 \times 3 \times 1) + (1 \times 1 \times 5) + (1 \times 0 \times 4) = 8$$

$$\left| \frac{1}{2} [(3) - (8)] \right| = 2,5 \quad \text{مساحة المثلث}$$

## النظير الضربي للمصفوفة

يكون للمصفوفة نظير ضربي إذا كانت قيمة

المحددة لها  $\neq$  صفر

**مثلاً** المصفوفة  $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  ليس لها نظير لأن قيمته

المحددة = صفر  $(2 \times 3) - (1 \times 6) = 0$

المصفوفة  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  يكون نظيرها الضربي هو

$$\frac{1}{\text{المحددة}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**مثال 7** أوجد النظير الضربي للمصفوفة  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

**الحل** قيمة المحددة =  $(3 \times 4) - (1 \times 5) = 7$

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

النظير الضربي

**مثال 8** إذا لم يكن للمصفوفة نظير فما قيمته  $x$

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ x & 9 \end{bmatrix}$$

**الحل** لأن المصفوفة ليس لها نظير فإن قيمته المحددة = 0

$$(4 \times 9) - (12 \times x) = 0$$

$$12x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{12} = 3$$

**تدريب** إذا كانت المصفوفة  $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

ليس لها نظير فما قيمته  $x$



عماد الجيزي

مؤلف كتاب المعاصر

## المحددات

طريقة فك المحددة من الدرجة الثانية

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \times d) - (b \times c)$$

**مثال 4** أوجد قيمة المحددة  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$

**الحل**  $(2 \times -3) - (4 \times 5) = -26$

طريقة فك المحددة من الدرجة الثالثة

نكرر العمود الأول والثاني ثم نجمع الأقطار الرئيسية

والأقطار الفرعية ونطرحها

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{مثال 5 أوجد ناتج المحددة}$$

**الحل**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

مجموع الأقطار الرئيسية

$$(1 \times 0 \times 5) + (3 \times 0 \times 1) + (-1 \times 2 \times 4) = -8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

مجموع الأقطار الفرعية

$$(3 \times 2 \times 5) + (1 \times 0 \times 4) + (-1 \times 0 \times 1) = 30$$

$$(-8) - (30) = -38 \quad \text{الناتج}$$

## مساحة المثلث

المثلث الذي رؤوسه  $(e, f)$  و  $(c, d)$  و  $(a, b)$  تكون

المساحة هي

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

**مثال 6** أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي

$$(0,0) \text{ و } (3,0) \text{ و } (1,2)$$

**الحل**

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

مجموع الأقطار الرئيسية

$$(1 \times 0 \times 1) + (2 \times 1 \times 0) + (1 \times 3 \times 1) = 3$$



تجميعات 1435

٥ إذا كان  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  فإن  $A \cdot A =$

- a)  $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$   
c)  $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$  d)  $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

٦ ما النظير الضربي للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- a)  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$   
c)  $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  d)  $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

٧ إذا كانت المصفوفة  $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$  ليس لها نظير

فما قيمة  $x$

- A)  $\frac{4}{3}$  b)  $\frac{4}{5}$  c)  $\frac{-4}{3}$  d)  $\frac{-4}{5}$

٨ جد ناتج  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$  إذا كان ذلك ممكناً

- a)  $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$  b)  $[-3]$   
c) الضرب غير معرف d)  $[11]$

تجميعات 1437

١ أوجد قيمة  $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

- a) 164 b) -164 c) 94 d) -94

٢ ما ناتج  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

- a)  $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$   
c)  $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$  d)  $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

تجميعات 1436

٣ أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي

$$a(0,0), b(-2,8), c(4,12)$$

- a) 56 b) 40 c) 22 d) 12

٤ إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

ماهي العملية الجبرية التي تتم على  $A, B$  لينتج

$$\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 10 & 11 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- a)  $A + B$  b)  $2A + B$  c)  $A - B$  d)  $A + 2B$

مفاتيح الحل

8	7	6	5	4	3	2	1
d	d	b	b	b	a	a	b



## المتتابعة الحسابية

### ١ الحد النوني للمتتابعة الحسابية

المتتابعة الحسابية هي مجموعة من الحدود المرتبة

بشرط أن الفرق بين أي حدين متتاليين هو مقدار ثابت

المقدار الثابت يسمى أساس المتتابعة ورمزه  $d$

الحد الأول في المتتابعة هو  $a_1$

الحد النوني للمتتابعة هو  $a_n$

$n$  هو رتبة أي حد

الحد النوني هو  $a_n = a_1 + (n - 1) \times d$

مثال 1 أوجد الحد الثاني عشر في المتتابعة

1, 4, 7, 10, 13, ...

الحل  $a_1 = 1, d = 3, n = 12$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times d$$

نعوض في القانون

$$a_{12} = 1 + (12 - 1) \times 3 = 34$$

مثال 2 اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة

10, 8, 6, 4, ...

الحل  $a_1 = 10, d = -2$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times d$$

$$10 + (n - 1) \times (-2)$$

$$10 - 2n + 2 = 12 - 2n$$

### ٢ الأوساط الحسابية

كل حدود المتتابعة الحسابية أوساط حسابية ماعدا

الأول والأخير ولتعيينها لابد من إيجاد قيمة  $d$

$$d = \frac{\text{الحد الأخير} - \text{الأول}}{\text{رتبة الأخير} - 1}$$

مثال 3 ما هي الحدود التي تصلح أن تكون أوساط

حسابية بين الحدود

1, ..., 13

a) 2,5,8 b) 3,6,9 c) 4,7,10 d) 5,8,11

الحل 3 أوساط + الأول والأخير

عدد الحدود كلها هو 5

$$d = \frac{13 - 1}{5 - 1} = \frac{12}{4} = 3$$

نضيف 3 إلى الحد الأول كي نحصل على الأوساط

4,7,10

### ٣ مجموع حدود المتتابعة الحسابية

يمكن جمع عدد  $n$  من حدود المتتابعة الحسابية

$$s_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

مثال 5 أوجد مجموع أول 20 عدد فردي

الحل

الأعداد الفردية هي

1,3,5, ...

$$a_1 = 1, d = 2, n = 20$$

$$s_{20} = \frac{20}{2} (2 + 19 \times 2) = 400$$

## المتتابعات الهندسية

المتتابعة الهندسية هي مجموعة من الحدود المرتبة

بشرط أن قسمت أي حد على ما قبله يعطي مقدار ثابت

يسمى أساس المتتابعة ورمزه  $r$

مثال 6 أي مما يلي هو متتابعة هندسية

a) 5,10,15 b) 1,4,8 c) 3,9,27 d) 5,8,11

الحل

المتتابعة الهندسية هي 3,9,27

لأن كل حد يتم ضربه في 3 ليعطي ما بعده

### ٤ الحد النوني للمتتابعة الهندسية

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

مثال 7 أوجد الحد الخامس في المتتابعة الهندسية

4,8,16, ...

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$= 4 \cdot (2)^4 = 4 \cdot 16 = 64$$

عماد الجيزي

مؤلف كتاب المعاصر

مثال 11 أوجد مجموع حدود متتابعة هندسية

لانهائية حدها الأول 15 وأساسها  $\frac{1}{2}$

**الحل**  $r = \frac{1}{2}$   $a_1 = 15$

$$s_{\infty} = \frac{15}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30$$

مثال 12 أوجد  $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

**الحل** عند وضع  $k = 1$  نحصل على  $a_1$

$$a_1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = 2$$

$$r = \frac{1}{3}$$

$$s_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

#### ٨ العدد الدوري

يمكن كتابة العدد الدوري في صورة كسر اعتيادي

كمايلي في المثال

مثال 13 أكتب  $0,12$  في صورة كسر اعتيادي

**الحل**  $0,12 = 0,12121212121212$

$$0,12 + 0,0012 + 0,000012 + \dots$$

وهي متتابعة هندسية إلى  $\infty$  حدها الأول

$$a_1 = 0,12 \quad r = 0,01$$

$$s_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0,12}{1 - 0,01} = \frac{0,12}{0,99} = \frac{12}{99}$$

#### ٩ مفكوك ذات الحدين

$$(x + y)^n$$

عدد حدود المفكوك هو  $n + 1$

أي حد رقمه  $r$  من حدود المفكوك هو

$$C_{r-1}(x)^{n-r+1}(y)^{r-1}$$

مثال 14 أوجد الحد الثالث في مفكوك  $(x + 4)^5$

**الحل** الحد الثالث هو

$$5C_2(x)^3(4)^2$$

$$\frac{5 \times 4}{2 \times 1} \cdot x^3 \cdot 16 = 160x^3$$

عماد الجيزري

مؤلف كتاب المعاصر

مثال 8 أي ممايلي هو الحد النوني  $3, 9, 27, \dots$

a)  $3^n$  b)  $3^{n-1}$  c)  $9^n$  d)  $3n$

**الحل** نستخدم طريق التجربة ونعوض عن  $n$  بـ 1 ثم 2

ثم 3

نجد أن  $a$  هو الحل الصحيح لأن لو عوضنا عن  $n$  بـ 1

ينتج 3 ثم نعوض عن  $n$  بـ 2 ينتج 9 ونعوض عن  $n$  بـ 3

ينتج 27

#### ٥ مجموع حدود المتتابعة الهندسية

يمكن جمع عدد  $n$  من حدود المتتابعة الهندسية

$$s_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

مثال 9 أوجد ناتج  $2 + 4 + 8 + \dots + 32$

**الحل**  $a_1 = 2$   $a_n = 32$   $r = 2$

$$s_n = \frac{2 - 32 \cdot 2}{1 - 2} = \frac{-62}{-1} = 62$$

#### ٦ المتتابعة الهندسية الغير منتهية

هناك نوعان من المتتابعات الهندسية الغير منتهية

■ المتتابعة الهندسية التقاربية  $-1 < r < 1$

■ المتتابعة الهندسية التباعدية  $r \geq 1$  أو  $r \leq -1$

مثال 10 أي المتتابعات الأتية تقاربية

a)  $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$  b)  $2, 4, 6, \dots$

c)  $3, 6, 12, \dots$  d)  $-5, -10, -50, \dots$

**الحل**

المتتابعة التقاربية هي a) لأن أساسها  $r = \frac{1}{2}$

#### ٧ جمع المتتابعة الهندسية إلى $\infty$

يمكن جمع المتتابعة الهندسية التقاربية إلى  $\infty$  من

$$s_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r}$$



## تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو



### فيديو شرح التجميعات

٧ في المتتابعة 4,8,16,32, ... ..

ما هو الأساس

- a) 2      b) 3      c) 4      d)  $\frac{1}{2}$

٨ ماقيمة  $\sum_{n=3}^{17} (2x - 1)$

- a) 285      b) 230      c) 125      d) 320

٩ أوجد الحد قبل الأخير في مفكوك

$$\left(25x + \frac{1}{5}\right)^5$$

- a)  $\frac{1}{25}x$       b)  $5x$       c)  $\frac{1}{5}x$       d)  $25x^2$

### تجميعات 1435

١٠ صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية الآتية

5,10,20,40,80, ... ..

- a)  $a_n = 5^n$       b)  $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$   
c)  $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$       d)  $a_n = 5 \cdot 2^n$

١١ العبارة  $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  تكافئ

- a)  $\sum_{k=1}^3 k^{-k}$       b)  $\sum_{k=1}^3 k^{\frac{1}{k}}$   
c)  $\sum_{k=1}^3 \sqrt{k}$       d)  $\sum_{k=1}^3 k^k$

١٢ أي المتسلسلات الآتية غير تفرافية

- a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$       b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$   
c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$       d)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

### تجميعات 1437

١ مارقم الحد الذي معاملته 56 في مفكوك

$$\left(\frac{1}{x} + x\right)^8$$

- a) 3      b) 4      c) 5      d) 6

٢ متتابعة هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى هو 26 ومجموع الحدود الثلاثة التالية هو 702 كم يكون أساسها

- a)  $\frac{1}{27}$       b)  $\frac{1}{3}$       c) 3      d) 27

٣ ماقيمة  $\sum_{n=4}^{18} (6n - 1)$

- a) 750      b) 975      c) 1100      d) 1150

٤ متتابعة هندسية

... .. ,  $\frac{27}{8}$  ,  $\frac{9}{2}$  , 6, 8 أوجد حدها الخامس

- a)  $\frac{81}{32}$       b)  $\frac{32}{81}$       c)  $\frac{243}{16}$       d) 81

### تجميعات 1436

٥ الحد رقم 100 في المتتابعة

9, 16, 23, 30, ... ..

- a) 260      b) 340      c) 650      d) 702

٦ متتابعة حسابية 43,39,35, ... ..

فإن العدد 7 يكون الحد رقم

- a) 8      b) 90      c) 10      d) 11

### مفاتيح الحل

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	b	d	c	a	a	c	d	a	b	c	d

مثلاً تبسيط العبارة  $\frac{20a^5b^3}{4a^2b^7}$  هو  $\frac{5a^3}{b^4}$

### ٥ العمليات على كثيرات الحدود

- عند جمع او طرح كثيرات الحدود نجمع الحدود المتشابهة فقط
- عند الضرب نستخدم طريقة التوزيع وعند ضرب الحدود المتشابهة نجمع الأسس
- عند القسمة محاولة التحليل أو أخذ العامل المشترك ثم التبسيط بسطاً مع مقاماً

مثال 4 بسط العبارة  $(5x^2 - 2x + 1) - (3x^2 - 7x + 3)$

**الحل** يتم توزيع الإشارة السالبة على القوس ثم نجمع الحدود المتشابهة

$$5x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 7x - 3 = 2x^2 + 5x - 2$$

مثال 5 بسط العبارة  $\frac{1}{2}x^3(4x^2 + 6x - 2)$

**الحل**  $2x^5 + 3x^4 - x^3$

مثال 6 إذا كان  $f(x) = 5x^2 - 1$  و  $g(x) = 5x^2 + 1$  أوجد  $(f \cdot g)(x)$

**الحل**  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (5x^2 - 1)(5x^2 + 1) = 25x^4 - 1$

### ٦ العمليات على العبارات النسبية

العبرة النسبية تكون مكونه من بسط ومقام وتكون غير معرفة عند القيم التي تجعل المقام = صفر

مثال 7 ماهي قيم  $x$  التي تجعل الدالة غير معرفة

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+2)(x-5)}$$

**الحل** الأعداد التي تجعل المقام = صفر هي 5، -2 لذلك تكون الدالة غير معرفة عند 5، -2

عماد الجيزري

مؤلف كتاب المعاصر

### ١ قيمة الدالة عند نقطة

مثال 1 إذا كان  $f(x) = 5x + 4$  أوجد  $f(2)$

**الحل** يتم التعويض عن كل  $x = 2$

$$f(2) = 5(2) + 4 = 14 \text{ لتصبح الدالة}$$

مثال 2 إذا كان  $f(x) = x^2 - 5x$  أوجد  $f(2a)$

**الحل**  $f(2a) = (2a)^2 - 5(2a)$

$$f(2a) = 4a^2 - 10a$$

مثال 3 إذا كان  $f(x) = \begin{cases} x+4 & x < 2 \\ x^2+1 & x \geq 2 \end{cases}$  أوجد  $f(3)$

**الحل** حيث أن العدد 3 يوجد ضمن قيم  $x \geq 2$

لذلك نعوض في الدالة الثانية فقط

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

### ٢ درجة وحيدة الحد

هي مجموع الأسس فوق المتغيرات

مثلاً درجة وحيدة الحد  $5x^4y^3$  هي 7

### ٣ درجة كثيرة الحدود

هي درجة أعلى وحيدة فيها ويسمى معاملها بالمعامل الرئيسي

مثلاً درجة كثيرة الحدود  $7x^3 + 4x^2 - 5x + 2^7$

الدرجة 3 والمعامل الرئيسي 7

### ٤ تبسيط العبارات الجبرية

عند ضرب الأساسات المتشابهة نجمع الأسس

عند قسمة الأساسات المتشابهة نطرح الأسس

مثلاً عند تبسيط العبارة  $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

نضرب العدد في العدد وفي الأساسات المتشابهة نجمع

$$\text{الاسس } 2 \cdot (-7)x^{-3+5}y^{3-6}$$

$$-14x^2y^{-3} = \frac{-14x^2}{y^3}$$



$$\frac{a-1}{a-1} \cdot \frac{1}{a+1} + \frac{a+1}{a+1} \cdot \frac{1}{a-1}$$

$$\frac{a-1+a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a}{(a-1)(a+1)}$$

▪ عند ضرب أو قسمة العبارات النسبية لابد من

التحليل بسطاً ومقاماً ثم الحذف

مثال 12 بسط العبارة الآتية  $\frac{25a^3b^4}{8c^2} \cdot \frac{16c}{5a^2b^7}$

**الحل** نختصر  $a^3$  مع  $a^2$  ويبقى  $a$  في البسط

نختصر  $b^4$  مع  $b^7$  ويبقى  $b^3$  في المقام

نختصر  $c$  مع  $c^2$  ويبقى  $c$  في المقام

نختصر الأعداد مع بعضها ليصبح المقدار هو

$$\frac{5a^2 \cdot 2}{c \cdot b^3} = \frac{10a^2}{cb^3}$$

مثال 13 أوجد ناتج  $\frac{n^5}{n-6} \cdot \frac{n^2-6n}{n^8}$

**الحل** نأخذ العامل المشترك ونختصر

$$\frac{n^5}{n-6} \cdot \frac{n(n-6)}{n^8} = \frac{n^6}{n^8} = \frac{1}{n^2}$$

مثال 14 أوجد ناتج  $\frac{5x}{2y} \div \frac{10x}{4y}$

**الحل** نحول علامة القسمة إلى ضرب

$$\frac{5x}{2y} \times \frac{4y}{10x} = \frac{2}{2} = 1$$



عماد الجيزري

مؤلف كتاب المعاصر

مثال 8 العبارة  $\frac{x-5}{x^2-25}$  تكون غير معرفة عند.....

**الحل** يكون المقام = صفر

$$x^2 - 25 = 0 \rightarrow (x-5)(x+5) = 0$$

$$x = 5 \text{ أو } x = -5$$

وبذلك تصبح العبارة غير معرفة عند  $\{5, -5\}$

▪  $L.C.M$  هو المضاعف المشترك الأصغر للمقادير

وكي نحصل عليه يجب تحليل كلاً منها إلى عوامل ثم

نأخذ من العوامل ما هو مشترك بأكبر أس والغير مشترك

مثال 9 أوجد  $L.C.M$  للمقادير

$$20x^2y^4, 15xy^3, 10x^3z$$

**الحل** نقوم بتحليل الأعداد 20، 15، 10

2	10	15	20
5	5	15	10
3	1	3	2
2	1	1	2
1	1	1	1

$$L.C.M = 2.5.2.3x^3y^4z$$

▪ عند جمع وطرح العبارات النسبية لابد من توحيد المقامات

مثال 10 تبسيط العبارة  $\frac{3}{2ab} - \frac{1}{a}$  هو.....

**الحل** لتوحيد المقامات نضرب المقدار الثاني في  $2b$

$$\frac{3}{2ab} - \frac{1}{a} \times \frac{2b}{2b}$$

$$= \frac{3-2b}{2ab}$$

مثال 11 أوجد ناتج  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$

**الحل** نضرب الحد الأول في  $(a-1)$

ونضرب الحد الثاني في  $(a+1)$

## ٩ عدد الجذور المركبة

هو نفس درجة كثيرة الحدود

**مثلاً** عدد الجذور المركبة لكثيرة الحدود

$$3x^4 - 5x^2 + 7$$

**الحل** عدد الجذور المركبة هو 4

## ١٠ تركيب الدوال

إذا كان  $f(x), g(x)$  دالتين فإن تحصيل دالتين هو

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ونحصل عليها عن طريق التعويض بالدالة  $g(x)$  داخل

الدالة  $f(x)$

**مثال 18** إذا كانت  $f(x) = 5x^2, g(x) = 2x + 1$

**أوجد**  $(f \circ g)(x)$

**الحل** نعوض عن الدالة  $g(x)$  داخل الدالة  $f(x)$

$$f(g(x)) = 5(2x + 1)^2 =$$

$$5(4x^2 + 4x + 1) = 20x^2 + 20x + 5$$

**مثال 19** إذا كانت  $f(x) = 4x^2, g(x) = 3x$

**أوجد**  $(f \circ g)(2)$

**الحل** نوجد  $g(2)$

$$g(2) = 3(2) = 6$$

ثم نوجد  $f(6)$

$$f(6) = 4(6^2) = 4(36) = 144$$

**مثال 20**  $f(x) = \{(7, 2), (3, -1), (6, -8)\}$

$$g(x) = \{(-1, 7), (-5, 6), (3, 4)\}$$

**أوجد**  $f \circ g(x)$

**الحل** نبدأ من عنصر  $x$  الموجود داخل  $g(x)$  ثم نذهب

للدالة  $f(x)$

$$g(-1) = 7 \rightarrow f(7) = 2$$

$$g(-5) = 6 \rightarrow f(6) = -8$$

$$g(3) = 4 \rightarrow f(4) = \text{غير معروف}$$

وبذلك يكون ناتج التحصيل هو

$$(-1, 2), (-5, -8)$$

1	2
-	
5	-8
-	
3	لا يوجد

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

## ٧ نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود  $f(x)$  على  $x - r$  فإن

باقي القسمة هو  $f(r)$

**مثال 15** إذا كانت  $f(x) = x^3 + x^2 - 3$  فإن باقي

قسمة  $f(x)$  على  $x - 1$  هو

a) 0

b) -1

c) 4

d) 1

**الحل** لإيجاد باقي القسمة نعين  $f(1) = 1^3 + 1^2 - 3$

$$f(1) = -1$$

**ملحوظة**

يكون  $x - r$  عامل من عوامل كثيرة الحدود  $f(x)$  إذا

كان  $f(r) = 0$

**مثال 16** أحد عوامل كثيرة الحدود  $f(x) = x^3 - 7x + 6$

a)  $x - 1$

b)  $x + 1$

c)  $x - 2$

d) 1

**الحل** نستخدم طريقة التجربة

نعوض عن 2 أو -1 أو  $x = 1$  ونراقب أي منها سيعطي

ناتج صفر

$$f(1) = 1^3 - 7(1) + 6 = 0$$

هذا يعني ان العامل هو  $x - 1$

## ٨ الأصفار الحقيقية للدالة

عدد الأصفار الحقيقية للدالة هو عدد نقاط تقاطع

المنحنى مع محور  $x$

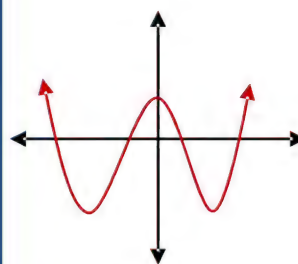
**مثال 17** كم عدد الأصفار الحقيقية للدالة المرسومة

a) 2

b) 3

c) 4

d) 1



**الحل** عدد الأصفار هو عدد

نقاط التقاطع مع محور  $x$

وبذلك يكون عدد الأصفار

هو 4



## ١٤ مجال الدالة كثيرة حدود

نضع ماتحت الجذر  $0 <$

**مثال 26 أوجد مجال الدالة**  $f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{x-4}}$

$$x - 4 > 0$$

$$x > 4$$

**الحل**

## ١٥ معكوس الدالة

١. استبدال  $f(x)$  بـ  $y$

٢. استبدال  $y$  بـ  $x$  والعكس

٣. نضع  $y$  طرفاً لوحده

**مثال 27 إذا كان**  $f(x) = 2x + 3$  **فإن**  $f^{-1}(x)$

$$y = 2x + 3 \quad \text{استبدال } f(x) \text{ بـ } y$$

$$x = 2y + 3 \quad \text{استبدال } x \text{ بـ } y$$

$$2y = x - 3 \quad \text{جعل } y \text{ طرفاً لوحده}$$

$$y = \frac{x-3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

## ١٦ متوسط التغير في الدالة

متوسط معدل التغير للدالة  $f(x)$  في الفترة  $[a, b]$  هو

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**مثال 28 أوجد متوسط معدل التغير للدالة**

$$f(x) = x^2 + 5 \quad \text{في } [1, 2]$$

**الحل**

$$f(2) = 4 + 5 = 9$$

$$f(1) = 1 + 5 = 6$$

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{9 - 6}{2 - 1} = 3 \quad \text{المتوسط هو}$$

**مثال 29 أوجد متوسط تغير الدالة للدالة**

$$f(x) = \sqrt{2x+3} \quad \text{في } [-1, 3]$$

**الحل**

$$f(-1) = \sqrt{2(-1)+3} = \sqrt{1} = 1$$

$$f(3) = \sqrt{2(3)+3} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{المتوسط هو}$$

عماد الجيزي

مؤلف كتاب المعاصر

## ١١ المعادلات والمتباينات الجذرية

لحل المعادلة أو المتباينة الجذرية نضع الجذر في طرف واحد ثم نربع الطرفين لتتخلص من الجذر

**مثال 21 حل المعادلة**  $\sqrt{x+2} - 7 = 0$

$$\sqrt{x+2} = 7$$

$$x + 2 = 49 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$x = 47$$

**مثال 22 حل المعادلة**  $\sqrt{3x-2} > 4$

**الحل** بتربيع الطرفين  $3x - 2 > 16$

$$3x > 18$$

$$x > 6$$

## ١٢ مجال الدالة كثيرة الحدود

المجال هو  $R$

**مثال ٢٣ أوجد مجال الدالة**  $f(x) = x^2 + 5x - 2$

**الحل** المجال هو  $R$

## ١٣ مجال الدالة تحت الجذر التربيعي

نضع ماتحت الجذر  $0 \leq$

**مثال ٢٤ أوجد مجال**  $f(x) = \sqrt{2x+8}$

$$2x + 8 \geq 0$$

$$2x \geq -8$$

$$x \geq -4$$

ملحوظة

مجال الجذر التكعيبي هو  $R$

## ١٣ مجال الدالة الكسرية كثيرة حدود

$R - \{\text{أصفار المقام}\}$

**مثال ٢٥ أوجد مجال الدالة**  $f(x) = \frac{3x-2}{2x-6}$

**الحل** أصفار المقام  $2x - 6 = 0$

$$x = 3 \quad \text{أي أن}$$

المجال هو  $R - \{3\}$

## ١٨ العدد المركب $a + ib$

يسمى  $a$  الجزء الحقيقي  $b$  الجزء التخيلي

عند تساوي عددين مركبين فإن الأجزاء الحقيقية متساوية والأجزاء التخيلية متساوية

**مثال 32** إذا كان  $3a + 5bi = 6 - 25i$

أوجد قيمته  $a, b$

**الحل** الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي

$$3a = 6 \rightarrow a = 2$$

الجزء التخيلي = الجزء التخيلي

$$5b = -25 \rightarrow b = -5$$

عند جمع وطرح أعداد مركبة نجمع الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

**مثال 33** أوجد ناتج  $(3 + 5i) - (7 - 2i)$

$$3 + 5i - 7 + 2i$$

$$= -4 + 7i$$

عند ضرب أعداد مركبة نستخدم طريقة التوزيع

**مثال 34** ما قيمة  $(2 + 5i)(1 + 2i)$

$$\begin{aligned} (2 + 5i)(1 + 2i) \\ 2 + 4i + 5i + 10i^2 \\ 2 - 10 + 9i = -8 + 9i \end{aligned}$$

## ١٩ المعادلة التربيعية والمميز

المميز  $b^2 - 4ac$  يستخدم في تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية كمايلي

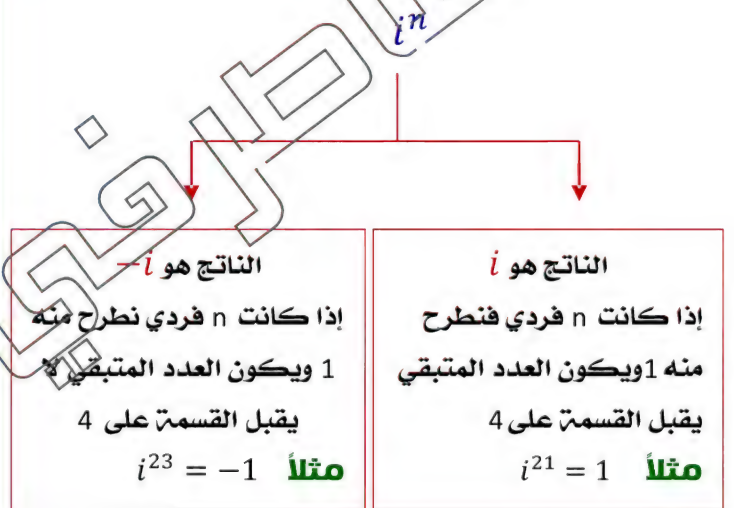
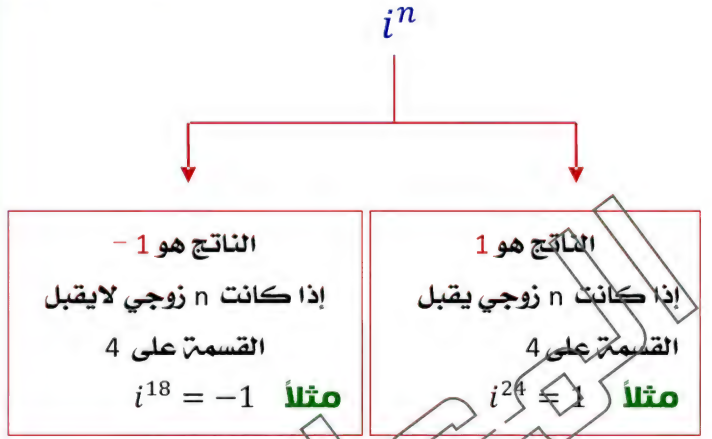
- لو الناتج عدد موجب مربع تكون الجذور حقيقة نسبية
- لو الناتج موجب غير مربع تكون الجذور حقيقة غير نسبية
- لو الناتج صفر تكون الجذور حقيقة متساوية
- لو الناتج سالب تكون الجذور تخيلية مركبة

عماد الجيزري

مؤلف كتاب المعاصر

## ٧ العدد التخيلي

- $\sqrt{-1} = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$



**مثال 30** حل المعادلة  $x^2 + 4 = 0$

**الحل**

بأخذ  $\sqrt{\quad}$  للطرفين  $x^2 = -4$

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$$

ما قيمة  $-3i \cdot 5i$

**مثال 31**

$$-15i^2 = -15(-1) = 15$$

**الحل**



## ٣٦ خطوط التقارب للدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$

- خط التقارب الرأسي عندما يكون المقام = صفر
- خط تقارب أفقي حسب درجة البسط والمقام
- ١ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقاملا يوجد خط تقارب أفقي
- ٢ إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام يوجد خط تقارب أفقي هو  $y = 0$
- ٣ إذا كانت درجة البسط = درجة المقام يوجد خط تقارب أفقي هو  $y = \frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$

**مثال 37** خط التقارب الرأسي للدالة  $f(x) = \frac{5x}{x^2-4}$

هو

a)  $x = \pm 2$     b)  $y = \frac{5}{2}$     c)  $y = 0$     d)  $x = 2$

**الحل**

خط التقارب الرأسي عندما يكون المقام = صفر  
 $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$  أي أن

**مثال 38** خط التقارب الأفقي للدالة  $f(x) = \frac{5x}{2x-4}$

هو

a)  $x = \pm 2$     b)  $x = \frac{5}{2}$     c)  $y = 0$     d)  $x = 2$

**الحل**

حيث أن درجة البسط = درجة المقام

فإن خط التقارب الأفقي هو

$y = \frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$

$y = \frac{5}{2}$



عماد الجيزري

مؤلف كتاب المعاصر

## ٣٧ دوال التغير

### ١ التغير الطردي

إذا كانت  $y$  تتغير طردياً مع  $x$  فإن  $y = kx$  حيث  $k$  عدد ثابت

**مثلاً**  $y = 2x$  أو  $\frac{y}{x} = 2$

كلها علاقات طردية بين  $x$  و  $y$

### ٢ التغير العكسي

إذا كانت  $y$  تتغير عكسياً مع  $x$  فإن  $y = \frac{k}{x}$  حيث  $k$  عدد ثابت

**مثلاً**  $xy = 2$  أو  $y = \frac{2}{x}$

### ٣ التغير المشترك

إذا كانت  $y$  تتغير مشترك مع  $x$  و  $z$  فإن  $y = kxz$  حيث  $k$  عدد ثابت

### ٤ التغير المركب

إذا كانت  $y$  تتغير طردي مع  $x$  وعكسي مع  $z$  فإن

$y = \frac{kx}{z}$

حيث  $k$  عدد ثابت

**مثال 35** أي العلاقات الآتية فيها تتغير  $y$  طردي مع  $x$  وعكسي مع  $z$

a)  $y = \frac{5x}{z}$     b)  $y = 5xz$     c)  $yx = 5$     d)  $y = \frac{z}{x}$

**الحل**

العلاقة الصحيحة هي  $y = \frac{5x}{z}$

**مثال 36** إذا كانت  $x$  تتغير عكسياً مع  $y$  وكانت

$x = 20$  عندما  $y = 4$  أوجد  $x$  عندما  $y = 5$

**الحل**

$x = 20 \leftarrow y = 4$

$x = ? \leftarrow y = 5$

حيث أن العلاقة عكسية نتحرك مع السهم

$x = \frac{20 \times 4}{5} = 16$



## تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

### فيديو شرح التجميعات

٨ ما أبسط صورة للعبارة النسبية

$$\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 25} \div \frac{x^2 - 7x}{x - 5}$$

a)  $\frac{x+3}{x(x+5)}$

b)  $\frac{x}{x+5}$

c)  $\frac{1}{x}$

d)  $\frac{x(x+5)}{x+3}$

٩ إذا كانت  $g(x) = x - 3$ ,  $f(x) = x^2 + 1$

ماهى النقطة التي تجعل  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

a)  $x = 1$

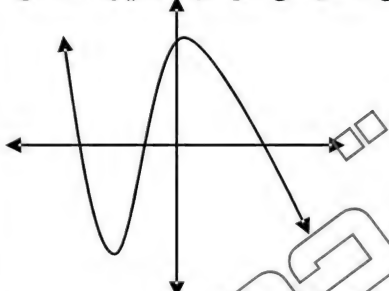
b)  $x = -1$

c)  $x = 2$

d)  $x = -2$

### تجميعات 1435

١٠ أي ممايلي ليس عامل من عوامل كثيرة الحدود



a)  $x - 3$

b)  $x + 3$

c)  $x + 1$

d)  $x - 2$

١١ في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$$

a)  $[6, 7]$

b)  $[2, 8]$

c)  $[8, 9]$

d)  $[9, 10]$

١٢ أي ممايلي لاينتمي إلى مجال الدالة

$$f(x) = \sqrt{4 - 2x}$$

a) 1

b) 3

c) 0

d) 2

### تجميعات 1437

١ المضاعف المشترك الأصغر L.C.M.

لكثيرتي الحدود  $4X^2Y^6, 20X^3Y^5$

a)  $20x^2y^5$

b)  $20x^3y^6$

c)  $4x^2y^5$

d)  $4xy$

٢ أوجد مجال الدالة  $f(x) = \frac{x-3}{2x-5}$

a)  $R - \{5\}$

b)  $R - \{\frac{5}{2}\}$

c)  $R - \{2\}$

d)  $R$

٣ إذا كان  $f(x) = 4x^2 - 8$  فما قيمة  $f(x-1)$

a)  $4x^2 - 8x - 4$

b)  $4x^2 - 8$

c)  $x^2 - 1$

d)  $x - 7$

### تجميعات 1436

٤ أوجد متوسط معدل التغير للدالة

$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$

في الفترة  $[3, 5]$

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

٥ أي ممايلي عامل من عوامل كثيرة الحدود

$$x^3 - x^2 + 2x + 4$$

a)  $x - 1$

b)  $x + 1$

c)  $x - 2$

d)  $x + 2$

٦ ما مجال الدالة  $f(x) = \sqrt{2x - 6}$

a)  $R - \{5\}$

b)  $R$

c)  $x \geq 6$

d)  $x \geq 3$

٧ أوجد متوسط معدل التغير للدالة في الفترة

$[-5, -3]$

$$f(x) = x^4 - 6x^2$$

a) -224

b) 115

c) -140

d) 625

### مفاتيح الحل

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	a	d	c	a	a	d	b	c	a	b	b



٨ خط التقارب الأفقي للدالة  $y = \frac{4x}{x^2-16}$

a)  $x = \pm 2$     b)  $y = \frac{5}{2}$     c)  $y = 0$     d)  $x = 2$

٩ توجد للدالة  $y = 2x^2 - 8x$  قيمة صغرى في  $[3, 5]$  هي

a) -6    b) -8    c) 10    d) 2

ارشاد للحل

توجد للدالة قيمة عظمى أو صغرى في  $[a, b]$  عند بداية ونهاية الفترة أو عند النقاط الحرجة إذا كانت تنتمي إلى الفترة



تجميعات 1437

١ إذا كانت  $x$  تتغير عكسياً مع  $y$  وكانت

$x = -12$  عندما  $y = 2$  فما قيمة  $y$  عندما  $x = 6$

a) -1    b) -4    c) 1    d) 2

٢ العلاقة بين  $x, y$  في المعادلة  $\frac{y}{x} = 2$  هي

a) مشترك    b) مركب    c) طرديه    d) عكسيه

تجميعات 1436

٣ المعادلة  $x^2 - 6x = -10$  لها حلان هما

a)  $\pm 3$     b)  $\pm 2$     c)  $\pm i$     d)  $3 \pm i$

٤ ما قيمة  $i^{24} + i^{25} + i^{26} + i^{27}$

a) 1    b) -1    c) 0    d)  $i$

٥ ما قيمة المميز للمقدار

$x^2 - 5x + 7 = 0$

a) 3    b) -3    c) 2    d) 0

٦ أوجد ناتج  $(4 + i)(4 - i)$

a) 17    b) 15    c)  $16 - i$     d)  $16 + i$

٧ أي مما يلي ليس حلاً لكثير الحدود

$x^3 - 37x - 84 = 0$

a) 6    b) -4    c) -3    d) 7

مفاتيح الحل

8	7	6	5	4	3	2	1
a	a	a	b	c	d	c	b

# المستوى القطبي ١٠

**مثال ٢** أي المعادلات الآتية هو معادلة خط مستقيم

زاوية ميله 30

a)  $r = 30$    b)  $r = 3$    c)  $\theta = 30$    d)  $\theta = 120$

**الحل** المعادلة الصحيحة هي c

**مثال ٣** أي المعادلات الآتية هو معادلة دائرة نصف

قطرها 3

a)  $r = 9$    b)  $r = 3$    c)  $\theta = 3$    d)  $\theta = 30$

**الحل** المعادلة الصحيحة هي b

**١ المسافة بين النقطتين في المستوى القطبي**

إذا كان  $p_1(r_1, \theta_1)$ ,  $p_2(r_2, \theta_2)$  نقطتين في المستوى القطبي فإن المسافة بينهما هي

$$p_1 p_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

**مثال ٤** أوجد المسافة بين النقطتين

$(2, 30^\circ)$ ,  $(1, 120^\circ)$

**الحل** المسافة هي

$$\sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cos(120 - 30)} = \sqrt{4 + 1 - 4(\theta)} =$$

$\sqrt{5}$

**٢ التحويل من القطبي إلى الديكارتي**

$x = r \cos \theta$  ,  $y = r \sin \theta$

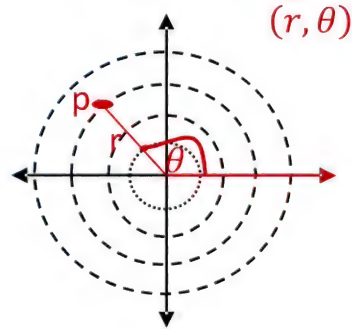
**مثال ٥** أوجد الاحداثي الديكارتي للنقطة  $(4, 60^\circ)$

$x = 4 \cos 60 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$y = 4 \sin 60 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

أي أن النقطة هي  $(2, 2\sqrt{3})$

أي نقطة  $p$  في المستوى القطبي يكون احداثيها



حيث  $r$  تعبر عن المسافة،  $\theta$  تعبر عن الزاوية المحصورة مع المحور القطبي

**هام جداً**

يمكن الحصول على عدة نقاط لها نفس التمثيل

البياني للنقطة  $(r, \theta)$  عن طريق إضافة أو طرح

$360$  مع الزاوية  $\theta$   $(r, \theta \pm 360)$

يمكن الحصول على عدة نقاط لها نفس التمثيل

البياني للنقطة  $(r, \theta)$  عن طريق تغيير إشارة  $r$

وإضافة أو طرح  $180$  مع الزاوية  $\theta$

$(-r, \theta \pm 180)$

المعادلة  $r = \text{عدد}$  هي معادلة دائرة نصف

قطرها هو العدد

المعادلة  $\theta = \text{زاوية}$  هي معادلة خط مستقيم

زاوية ميله هو قيمة الزاوية

**مثال ١** أوجد نقطة في المستوى القطبي لها نفس

التمثيل البياني للنقطة

$(3, 60)$

a)  $(4, 420)$

b)  $(3, 300)$

c)  $(-3, 240)$

d)  $(3, -120)$

**الحل**

الحل الصحيح هو c لأنه تم تغيير إشارة  $r$

وإضافة  $180$  للزاوية





#### ٤ القيمة المطلقة لعدد المركب

$$z = a + ib$$

القيمة المطلقة هي  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال ٨ أوجد القيمة المطلقة للعدد  $4 + 3i$

$$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

الحل

#### ٥ الصورة القطبية للعدد المركب

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

حيث  $r$  مقياس العدد المركب ،  $\theta$  سعة العدد المركب

مثال ٩ العدد  $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$  في الصورة القطبية هو.....

$$r = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$$

الحل

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \tan^{-1} 1 = 45$$

الصورة القطبية هي

$$z = 2(\cos 45 + i \sin 45)$$

مثال ١٠ العدد  $4(\cos 60 + i \sin 60)$  في الصورة

الديكارتية

الحل

$$\cos 60 = \frac{1}{2} \quad \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4(\cos 60 + i \sin 60) = 4\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + i2\sqrt{3}$$

مثال ١١ سعة العدد المركب  $z = 7(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

- a) 0      b) 30      c) 60      d) 7

الحل السعة هي  $60 = \frac{\pi}{3}$

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

#### ٣ التحويل من الديكارتية إلى القطبية

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

هام

نضيف للزاوية 180 إذا كانت النقطة في

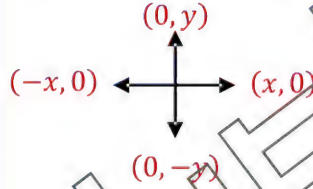
الربع الثاني أو الثالث

نضيف للزاوية 360 إذا كانت النقطة تقع في

الربع الرابع

إذا كانت النقطة تقع على المحاور فيجب تعيين

قيمة الزاوية مباشرة



مثال ٥ النقطة  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  في الصورة القطبية هي

- a) (1,45)      b) (2,30)      c) (2,45)      d)  $(\sqrt{2}, 60)$

الحل

$$r = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \tan^{-1} 1 = 45$$

النقطة هي (2,45)

مثال ٦ النقطة  $(-3, 0)$  في الصورة القطبية هي

- a)  $(3, \pi)$       b)  $(3, \frac{\pi}{2})$       c) (1,45)      d)  $(0, \frac{\pi}{3})$

الحل

$$r = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

وحيث أن النقطة تقع على محور x السالب فإن قيمة

الزاوية هو 180

تصبح النقطة هي (3,180)

مثال ٧ النقطة  $(\sqrt{3}, -1)$  في الصورة القطبية هي

الحل

$$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{-1} + 360 = -60 + 360 = 300$$

النقطة هي (2,300)



**الحل** أدخل  $\tan$  على طرفي المعادلة لتصبح

$$\frac{y}{x} = \tan \theta = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3}x$$

✓ إذا كانت المعادلة في صورة  $r = \theta$  نضرب الطرفين

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ ثم نعوض عن } r^2 \text{ بـ } x^2 + y^2$$

**مثال ١٤** ماصورة المعادلة  $r = 4\sin\theta$  في الصورة

الديكارتية

$$a) x + y = 3x \quad b) x^2 + y^2 = 4x$$

$$c) x^2 = 4y^2 \quad d) x^2 + y^2 = 4y$$

**الحل** نضرب الطرفين في  $r$  لتصبح المعادلة

$$r^2 = 4r\sin\theta$$

$$\text{نعوض عن } r^2 \text{ بـ } x^2 + y^2 \text{ ونعوض عن } r\sin\theta \text{ بـ } y$$

$$y$$

$$d) x^2 + y^2 = 4y$$

## ٦ تحويل المعادلة الديكارتية إلى الصورة القطبية

نستخدم التحويلات الآتية

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

**مثال ١٢** ما الصورة القطبية للمعادلة

$$x^2 - y^2 = 3$$

$$a) r^2 = 3\cos 2\theta$$

$$b) r^2 = \frac{3}{\sec 2\theta}$$

$$c) r^2 = 3\sec 2\theta$$

$$d) r^2 = \frac{3}{\csc 2\theta}$$

**الحل** نعوض عن  $x, y$  في المعادلة

$$(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = 3$$

$$= r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 3$$

$$\text{بأخذ } r^2 \text{ عامل مشترك} \quad r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 3$$

$$r^2\cos 2\theta = 3$$

$$r^2 = \frac{3}{\cos 2\theta} \rightarrow r^2 = 3\sec 2\theta$$

## ٧ تحويل المعادلة القطبية إلى الصورة الديكارتية

✓ إذا كانت المعادلة في صورة عدد  $r =$  نربع

$$\text{الطرفين ثم نعوض عن } r^2 \text{ بـ } x^2 + y^2$$

**مثال ١٣**

ماصورة المعادلة  $r = 3$  في الصورة الديكارتية

$$a) x + y = 3$$

$$b) x^2 + y^2 = 9$$

$$c) x^2 = 3y^2$$

$$d) x^2 + y^2 = 3\sin\theta$$

**الحل** نربع المعادلة لتصبح  $r^2 = 9$  ثم نعوض عن  $r^2$

$$\text{لتصبح المعادلة هي } b) x^2 + y^2 = 9$$

✓ إذا كانت المعادلة في صورة عدد  $\theta =$  ندخل  $\tan$

$$\text{على الطرفين ثم نعوض عن } \tan\theta \text{ بـ } \frac{y}{x}$$

**مثال ١٣**

ماصورة المعادلة  $\theta = \frac{\pi}{3}$  في الصورة الديكارتية

$$a) x + y = 3$$

$$b) y = \sqrt{3}x$$

$$c) x = \sqrt{2}y$$

$$d) x^2 + y^2 = 3\sin\theta$$



## تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

### تجميعات 1437

١ إذا كان  $x = 2$  في الصورة القطبية هي

- a)  $r = 2 \sec \theta$       b)  $r = 2 \tan \theta$   
c)  $r = 2 \csc \theta$       d)  $r = 2 \cot \theta$

٢ أوجد  $(1 + \sqrt{3}i)^6$

- a) 64      b) -64      c) 32      d) 1

٣ مقياس العدد المركب  $(i - 1)^8$  هو

- a) 4      b) 6      c) 8      d) 16

٤ أوجد الصورة الإحداثية للنقطة  $(-2, 60)$

- a)  $(1, \sqrt{3})$       b)  $(-1, 3)$       c)  $(-1, \sqrt{3})$       d)  $(\sqrt{3}, 1)$

٥ ما الصورة القطبية للمعادلة

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

- a)  $r = \sin \theta$       b)  $r = 2 \sin \theta$   
c)  $r = 4 \sin \theta$       d)  $r = 8 \sin \theta$

### تجميعات 1436

٦ ما الصورة الديكارتية للمعادلة  $\theta = \frac{\pi}{6}$

- a)  $x + y = 3$       b)  $y = \sqrt{3}x$   
c)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$       d)  $x^2 + y^2 = 3 \sin \theta$

٧ الصورة القطبية للمعادلة  $x^2 + y^2 = 9$

- a)  $r = 9$       b)  $r = \pm 3$   
c)  $r = 3 \sin \theta$       d)  $r = 3 \cos \theta$

### مفاتيح الحل

7	6	5	4	3	2	1
b	c	c	c	d	b	a

### فيديو شرح التجميعات

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

## ٨ نظرية ديموافر

إذا كان العدد  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

فإنه يمكن إيجاد  $z^n$  من القانون

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

مثال ١٥ إذا كان  $z = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

أوجد  $z^3$

$$z^3 = 4^3 \left( \cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right)$$

$$z^3 = 64(\cos \pi + i \sin \pi)$$

الحل

مثال ١٦ أوجد قيمة  $(1 + i)^4$

الحل لابد من تحويل العدد إلى الصورة القطبية

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{1} = 45^\circ \quad \text{و} \quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

بعد ذلك نوجد  $z^4$

$$\begin{aligned} z^4 &= \sqrt{2}^4 (\cos 4 \cdot 45^\circ + i \sin 4 \cdot 45^\circ) \\ &= 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) \\ &= 4(-1 + i \cdot 0) = -4 \end{aligned}$$

## ٩ ضرب وقسمة الاعداد المركبة في الصورة القطبية

عند الضرب نجمع الساعات ونضرب المقياس

عند القسمة نطرح الساعات ونقسم المقياس

مثال ١٧ إذا كان  $z_1 = 8(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

$$z_2 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

أوجد  $\frac{z_1}{z_2}$  و  $z_1 \cdot z_2$

الحل

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 8 \cdot 2(\cos(120^\circ + 30^\circ) + i \sin(120^\circ + 30^\circ)) \\ &= 16(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2}(\cos(120^\circ - 30^\circ) + i \sin(120^\circ - 30^\circ))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 4(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$



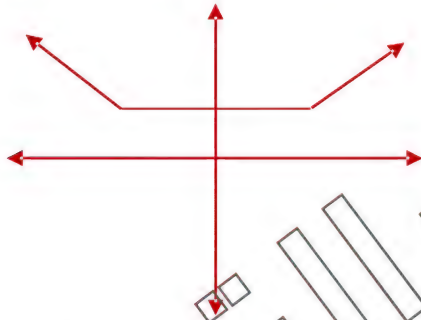
## ٢ التزايد والتناقص

نصع مماس وهمي لكل فرع في الدالة ينتج أحد المماسات الآتية



وتحدد فترة كل واحدة من بدايتها إلى نهايتها على محور  $x$  وتكون جميع الفترات مفتوحة

مثال ٣ أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة

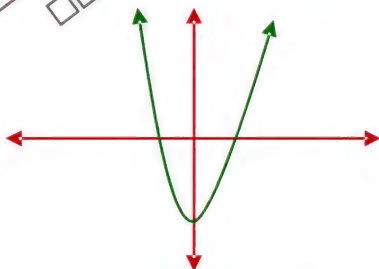


الحل الدالة تناقصية في  $]-\infty, 3[$

الدالة ثابتة في  $]-3, 3[$

الدالة تزايدية في  $]3, \infty[$

مثال ٤ أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة



الحل الدالة تناقصية في  $]-\infty, 0[$

الدالة تزايدية في  $]0, \infty[$

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

## ١ المجال والمدى

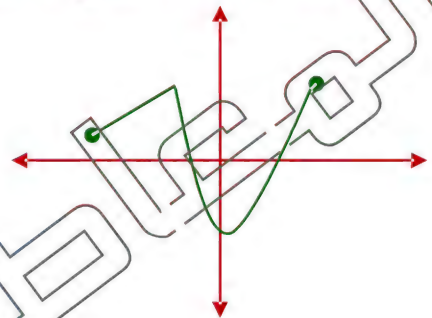
المجال بياني هو جميع قيم  $x$  المقابلة للرسم

المدى بياني هو جميع قيم  $y$  المقابلة للرسم

المقطع  $x$  نقاط تقاطع المنحنى مع محور  $x$

المقطع  $y$  نقاط تقاطع المنحنى مع محور  $y$

مثال ١ أوجد المجال - المدى - المقطع  $x$  - المقطع  $y$



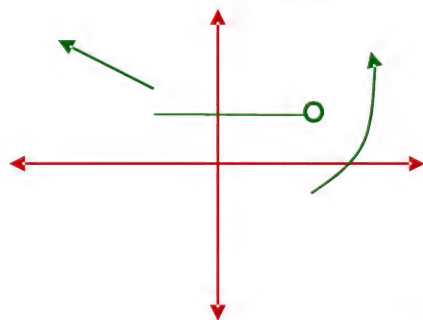
الحل المجال هو  $[-4, 3]$  بداية ونهاية الرسم على محور  $x$

المدى هو  $[-3, 3]$  بداية ونهاية الرسم على محور  $y$

المقطع  $x$  هو  $\{-1, 2\}$  نقاط تقاطع المنحنى مع محور  $x$

المقطع  $y$  هو  $\{-3\}$  نقاط تقاطع المنحنى مع محور  $y$

مثال ٢ أوجد المجال - المدى

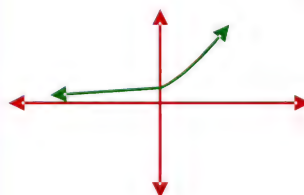


الحل المجال هو  $]-\infty, -2] \cup [-2, 3[ \cup [3, \infty[$

$R =$

المدى هو  $[-1, \infty[$

مثال ٣ أوجد المجال - المدى



الحل المجال  $R$

المدى  $]0, \infty[ = R^+$



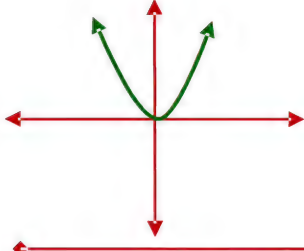
## ٤ الدوال الرئيسية الأم وطريقة الإزاحات

### الدالة التربيعية

$$f(x) = x^2$$

المجال هو  $R$

المدى هو  $Y \geq 0$

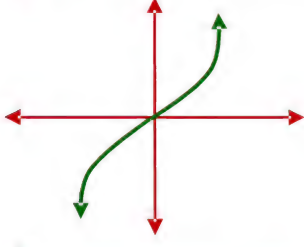


### الدالة التكعيبية

$$f(x) = x^3$$

المجال هو  $R$

المدى هو  $R$

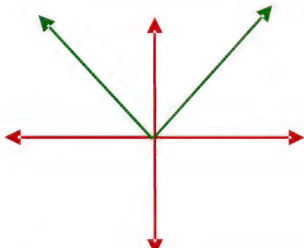


### دالة القيمة المطلقة

$$f(x) = |x|$$

المجال هو  $R$

المدى هو  $[0, \infty]$

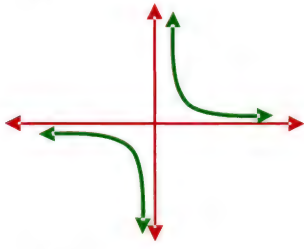


### دالة المقلوب

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

المجال هو  $R - \{0\}$

المدى هو  $R - \{0\}$

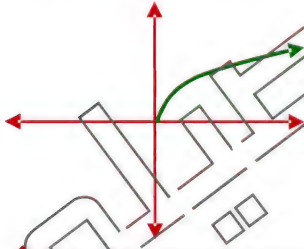


### دالة الجذر التربيعي

$$f(x) = \sqrt{x}$$

المجال هو  $[0, \infty[$

المدى هو  $[0, \infty[$

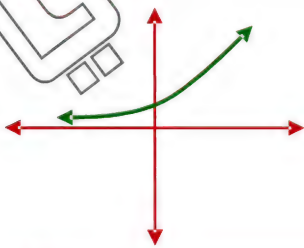


### الدالة الأسية

$$f(x) = b^x \text{ و } 0 < b < 1$$

المجال هو  $R$

المدى هو  $[0, \infty[$  أو  $R^+$

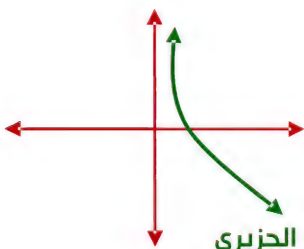


### الدالة اللوغاريتمية

$$f(x) = \log_b x \text{ و } 0 < b < 1$$

المجال هو  $[0, \infty[$  أو  $R^+$

المدى هو  $R$



عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

## ٢ القيمة العظمى والصغرى

القيمة العظمى المحلية هي أكبر قيمة للدالة في فترة

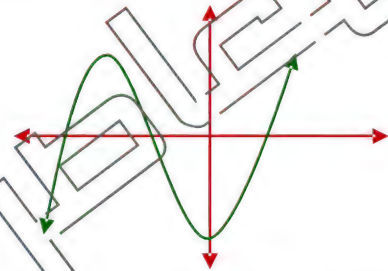
من المجال ← من على محور  $Y$

القيمة العظمى المطلقة هي أكبر قيمة للدالة في

مجالها كله ← من على محور  $Y$

ويحدث العكس في الصغرى المحلية و المطلقة

## مثال ٥ ما هي القيمة العظمى و الصغرى المحلية

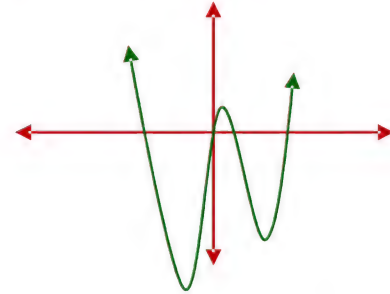


**الحل** عظمى محلية عند  $y = 4$

صغرى محلية عندما  $y = -2$

## مثال ٦ الدالة لها قيمة عظمى مطلقة هي .....

الدالة لها قيمة صغرى مطلقة هي .....



**الحل** القيمة العظمى المطلقة لا يوجد لأن المنحنى

ممتد إلى  $\infty$  ناحية أعلى ولكن توجد قيمة عظمى محلية

فقط عند  $y = 4$

قيمة صغرى مطلقة عند  $y = -5$



## مثال ١١) الدالة المرسومة أمامك هي

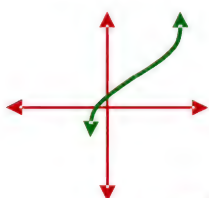
a)  $|x + 2|$       b)  $x^2 - 2$   
c)  $(x - 1)^2 - 2$       d)  $\sqrt{x - 2}$

**الحل** الدالة المرسومة هي دالة تربيعية بإزاحة

مقدارها 2 ناحية أسفل وبذلك يكون الحل الصحيح هو b

## ١ عائلة الدالة التكعيبية

عائلة الدالة التكعيبية هي  $f(x) = a(x - h)^3 + k$



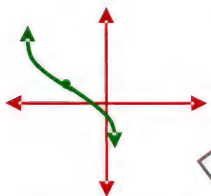
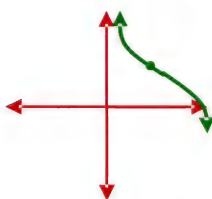
h إزاحة أفقية ، k إزاحة رأسية

لو k موجب تكون  
الإزاحة ناحية أعلى  
ولو سالب تكون  
الإزاحة ناحية أسفل

لو h موجب تكون  
الإزاحة ناحية اليمين  
ولو سالب تكون  
الإزاحة ناحية اليسار

**ملاحظة هامة** لو كانت a سالبة أي أن المنحنى حدث

له إنعكاس حول محور x



**مثال ١٢) الدالة المبينة بالرسم هي**

a)  $(x - 2)^3 + 1$       b)  $\sqrt{x}$   
c)  $-(x + 2)^3 + 1$       d)  $(x - 1)^2$

**الحل** يتضح من الرسم أن  $h = -2$  ،  $k = 1$  وقيمة a

سالبة بسبب حدوث إنعكاس حول محور x

أي أن الإجابة الصحيحة هي c)

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

## مثال ٧) الدالة الرئيسية الأم للدالة

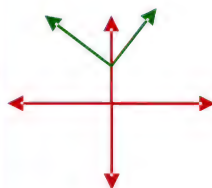
..... هي  $f(x) = (x - 1)^2 + 5$

**الحل** الدالة الأم هي  $f(x) = x^2$

## مثال ٨) الدالة الرئيسية الأم للدالة

..... هي  $f(x) = \frac{1}{x-1} + 5$

**الحل** الدالة الأم هي  $f(x) = \frac{1}{x}$

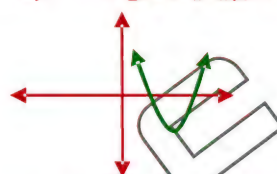


## مثال ٩) الدالة الرئيسية الأم للدالة

**الحل** الدالة الأم هي  $f(x) = |x|$

## ٥ عائلة الدالة التربيعية

عائلة الدالة التربيعية هي  $f(x) = a(x - h)^2 + k$



h إزاحة أفقية ، k إزاحة رأسية

لو k موجب تكون  
الإزاحة ناحية أعلى  
ولو سالب تكون  
الإزاحة ناحية أسفل

لو h موجب تكون  
الإزاحة ناحية اليمين  
ولو سالب تكون  
الإزاحة ناحية اليسار

**ملاحظة هامة** لو كانت a سالبة أي أن المنحنى حدث

له إنعكاس حول محور x



**مثال ١٠) إذا كان منحنى الدالة g(x) ينتج من منحنى**

الدالة f(x) بإزاحة مقدارها وحدتين لليسار و 3 وحدات

لأعلى مع إنعكاس حول محور x فما هي g(x)

**الحل** وحدتين لليسار أي أن  $h = -2$  ، 3 وحدات لأعلى

أي أن  $k = 3$  وإنعكاس حول محور x أي أن a سالبة

نعوض في العائلة  $g(x) = a(x - h)^2 + k$

لتصبح الدالة هي  $g(x) = -(x + 2)^2 + 3$



## تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

### تجميعات 1436

١ إذا كان منحنى  $g(x)$  ينتج من منحنى الدالة  $f(x) = \sqrt{x}$  بانسحاب وحدتين لليسار ثم انعكاس حول محور  $x$  ثم انسحاب ثلاث وحدات إلى الأسفل فأأي ممايلي يمثل الدالة  $g(x)$

a)  $g(x) = \sqrt{-x+2} - 3$

b)  $g(x) = -\sqrt{x+2} - 3$

c)  $g(x) = -\sqrt{x-2} + 3$

d)  $g(x) = \sqrt{x+2} - 3$

٢ مامدى الدالة  $f(x) = x^2 + 1$

إذا كان مجالها هو  $-2 < x < 3$

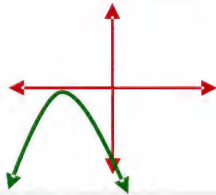
a)  $1 < f(x) < 9$

b)  $5 < f(x) < 9$

c)  $5 \leq f(x) < 10$

d)  $2 < f(x) < 10$

٣ الدالة الرئيسية الأم للدالة المرسومة هي



a)  $|x|$

b)  $\sqrt{x}$

c)  $x^2$

d)  $x$

٤ أي الدوال الآتية مداها  $f(x)|f(x) \leq 0$

a)  $|x|$

b)  $\sqrt{x}$

c)  $-|x|$

d)  $x$

٥ أي ممايلي يكون فيه  $f\left(\frac{-1}{2}\right) \neq -1$

a)  $f(x) = 2x$

b)  $f(x) = -4x^2$

c)  $f(x) = \lfloor x \rfloor$

d)  $f(x) = |2x|$

### مفاتيح الحل

5	4	3	2	1
d	c	c	c	b

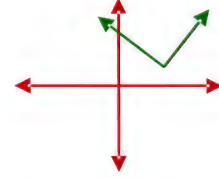


عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

### ٧ عائلة القيمة المطلقة

هي  $f(x) = a|x-h| + k$



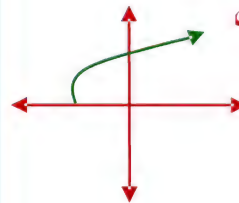
ونطبق عليها نفس الإزاحات والخصائص السابقة

### ٨ عائلة دالة الجذر التربيعي

هي  $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$

ونطبق عليها نفس الإزاحات والخصائص السابقة

مثال ١٣ الدالة المرسومة أمامك هي



a)  $|x+2|$

b)  $\sqrt{x+2}$

c)  $(x-1)^3 - 2$

d)  $\sqrt{x-2}$

الحل الدالة المرسومة هي دالة الجذر التربيعي

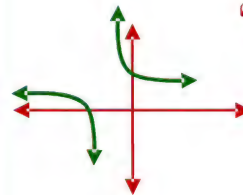
بإزاحة مقدارها 2 ناحية اليسار وبذلك يكون الحل

الصحيح هو b

### ٨ عائلة دالة المقلوب

$F(x) = \frac{a}{x-h} + k$

مثال ١٤ الدالة المرسومة أمامك هي



a)  $|x+2|$

b)  $\frac{1}{x} + 2$

c)  $(x-1)^2 - 2$

d)  $\frac{1}{x+1} + 1$

الحل الدالة المرسومة هي دالة المقلوب بإزاحة مقدارها

1 ناحية اعلى وإزاحة مقدارها 1 لليسار وبذلك يكون الحل

الصحيح هو d

## ١٢ الإحتمالات

### ١ مقدمة

❖ احتمال حدث  $A$  هو  $P(A)$

$$P(A) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج كلها}}$$

❖ حساب المضروب بدون أله

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

❖ حساب التباديل بدون أله

مثلاً عند حساب 5 تباديل 2

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

نبدأ بـ 5 ونعد رقمين فقط

$${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

نبدأ بـ 5 ونعد 4 أرقام

❖ حساب التوافيق بدون أله

مثلاً عند حساب 7 توافيق 3

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

نبدأ بـ 7 في البسط، 3 في المقام

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

### ٢ الفرق بين التباديل والتوافيق في حساب الاحتمال

يستخدم المضروب في حالة تبديل عدد من العناصر

مع نفسه

مثال ① بكم طريقة يمكن أخذ صورة لمجموعة من

الأشخاص عددهم 4

الحل هنا يتم تبديل 4 اشخاص مع أنفسهم

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال ② بكم طريقة يمكن وضع 3 كتب على رف في

صف واحد

الحل هنا يتم تبديل 3 كتب مع أنفسهم

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

عدد الطرق

نستخدم التباديل عند اختيار مجموعة صغيرة من

مجموعة كبيرة ونقوم بتباديل العناصر فيما بينهما على

أن يكون هذا الترتيب هام وكلما تغير الترتيب يؤدي

لنواتج مختلفة

مثال ③ يريد مصور أخذ صورة لـ 4 اشخاص من بين 6

أشخاص فكم عدد الصور الممكنة

الحل هنا يتم اختيار 4 من بين 6 والتبديل بينهما وحيث

أن التغير في الترتيب يؤدي إلي نواتج مختلفة

فنستخدم التباديل

$${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

تستخدم التوافيق عند اختيار مجموعة صغيرة من

مجموعة كبيرة وتبديلها مع بعضها لكن تبديل العناصر

مع بعضها لا يؤدي لنواتج مختلفة

مثال ④ يريد صاحب شركة اختيار 3 موظفين من بين

5 موظفين للفوز بجائزة العمرة

الحل اختيار 3 موظفين من 5 وحيث أن ترتيب الموظفين

المختارين غير هام فنستخدم التوافيق

$${}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

مثال ⑤ يتكون مجلس إدارة شركة من 6 أعضاء ما

احتمال اختيار 2 منهما على أن يكون فيصل هو الرئيس

ومهند هو النائب

الحل هنا يتم اختيار 2 من بين 6 وحيث أن ترتيبهما مهم

بسبب أن احدهما رئيس و الآخر نائب لذلك نستخدم

التباديل

$${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$$

العدد الكلي

عدد الحدث هو 1 لأن فيصل رئيس ومهند نائب يكون مرة

واحدة لذلك فإن الاحتمال هو  $\frac{1}{30}$





## ملحوظة

عند ترتيب العناصر بشكل دائري وكان أحد العناصر ثابتاً عند نقطة مرجعية فتنحصر إلى تبادل خطية عادية  $n!$

**مثال ١٠** ما هو عدد ترتيب 4 أشخاص في حلقة دائرية بحيث يكون أكبرهم بجانب الباب

**الحل** حيث أن جلوس أكبرهم جنب الباب هو تثبيت أحد العناصر لذلك نستخدم التبادل الخطية

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

**مثال ١١** جلس 4 أشخاص على طاولة دائرية ما احتمال أن يجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة جنب النافذة

**الحل** حيث أن الشخص الذي يدفع الفاتورة يجلس عند النافذة فتنحصر إلى تبادل خطية  $4! = 24$

**عدد الحدث** عند تثبيت من يدفع الفاتورة جنب النافذة فأصبح لدينا 3 عناصر يتم تبديلها مع بعضها البعض  $3! = 6$

$$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} \text{ احتمال}$$

## ٤ التبادل التكرارية

عند تبادل عدد من العناصر عددها  $n$  فيها تكرارات

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

**مثال ١٢** ما احتمال تكوين كلمة ماليزيا من الحروف

م-ي-ل-ي-أ-ز-أ

**الحل**

عدد الحروف 7 وحرف أ مكرر 2 وحرف ي مكرر 2

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$$

عدد الحدث هو 1 لتكوين كلمة ماليزيا واحدة

$$\frac{1}{1260} = \text{الاحتمال}$$

**مثال ٦** يريد مدرب كرة الطائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لخوض المباراة فما احتمال أن يكونوا محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال

**الحل** حيث أن اختيار اللاعبين يكون عشوائي والتبديل فيما بينهما غير هام لذلك نستخدم التوافق

$$C_6^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

عدد الحدث هو 1

$$\frac{1}{210} \text{ احتمال هو}$$

**مثال ٧** يريد مصور أخذ صورة لـ أحمد ومحمد ومحمود وسعيد أوجد احتمال أن يقف أحمد في اليمين ومحمد في اليسار

**الحل** عدد الترتيبات الكلية هو  $4! = 24$

بعد تثبيت أحمد ومحمد يصبح لدينا اثنين فقط

يتم التبديل فيما بينهما فيكون

عدد الحدث هو  $2! = 2$

$$\frac{2}{24} = \frac{1}{12} = \text{الاحتمال}$$

## ٢ التبادل الدائرية

عند ترتيب عدد من العناصر عددها  $n$  في صورة دائرة فإن

عدد الترتيبات هو  $(n-1)!$

**مثال ٨** ما هو عدد ترتيب 4 أشخاص في حلقة دائرية

**الحل** عدد الترتيبات هو  $6 = 3! = (4-1)!$

**مثال ٩** ما هو احتمال ترتيب الاشكال

الهندسية امامك في صورة دائرة

بنفس الترتيب



**الحل** الاشكال الهندسية في صورة دائرة

يكون عدد الترتيبات هو  $6 = 3! = (4-1)!$

$$\frac{1}{6} \text{ احتمال هو}$$



## ٦ الأحداث المستقلة

تكون الأحداث A , B مستقلة إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الآخر

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$$

**مثال ١٦** القى مكعب مرقم من 1 إلى 6 وقطعة نقد

فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6

**الحل** حيث ان الأحداث مستقلة

احتمال ظهور الشعار هو  $\frac{1}{2}$

احتمال ظهور العدد 6 هو  $\frac{1}{6}$

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

**مثال ١٦** إذا القيت قطعة نقد 4 مرات متتالية

فما احتمال ظهور الكتابة أربع مرات

$$\text{الحل الاحتمال هو } \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

## ٧ الأحداث الغير مستقلة

تكون الأحداث A , B مستقلة إذا كان وقوع أحدهما يؤثر في وقوع الآخر

( مسائل بدون إرجاع )

الاحتمال هو

( احتمال الأول ) × ( احتمال الثاني بعد استبعاد الأول )

**مثال ١٧** صندوق فيه 15 كره حمراء ، 5 كره أسود

ما احتمال سحب كرتين أحمر واحد تلو الآخر بدون

إرجاع

**الحل**

الاحتمال هو ( احتمال الأولى أحمر ) × ( احتمال الثانية

أحمر بعد استبعاد الأولى )

$$\frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{6}{7}$$

**مثال ١٣** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي لبيتك هو

36563 إذ تم اختياره من الأرقام 3,5,3,6,6

$$\text{الحل عدد النواتج } \frac{5!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 30$$

عدد الحدث هو 1

$$\text{الاحتمال} = \frac{1}{30}$$

## ٥ الاحتمالات الهندسية

احتمال ان تقع النقطة X على AB هو

$$\frac{\text{طول AB}}{\text{طول AC}}$$

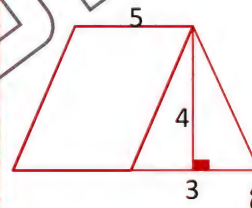


احتمال ان تقع النقطة X على

الدائرة هو

مساحة الدائرة

مساحة المستطيل



**مثال ١٤** ما احتمال أن تقع نقطة x

على متوازي الأضلاع

**الحل** نوجد مساحة متوازي الأضلاع

$$= \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع} = 4 \times 5 = 20$$

مساحة شبه المنحرف

$$\frac{1}{2} (\text{مجموع القاعدتين المتوازيتين}) \times \text{الارتفاع}$$

$$26 = 4 \times (8 + 5) \frac{1}{2}$$

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{مساحة متوازي الاضلاع}}{\text{مساحة شبه المنحرف}} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$$

**مثال ١٥** إذا اخترت نقطة داخل المستطيل فما احتمال

وقوعها على الدائرة

**الحل**



4

16

$$\text{مساحة الدائرة} = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

$$\text{مساحة المستطيل} = 16 \times 10 = 160$$

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{مساحة الدائرة}}{\text{مساحة المستطيل}} = \frac{\pi \cdot 16}{10 \times 16} = \frac{\pi}{10}$$



**مثال (٢١)** الجدول التالي يوضح عدد الناجحين والراسبين

	أخذ حصص	لم يأخذ حصص
ناجح	20	15
راسب	35	30

ما احتمال ناجح علماً بأنه أخذ حصص

**الحل** هنا تم وضع شرط بأنه أخذ حصص

لذلك يتم تعيين ما أخذ حصص كله =  $55 = 35 + 20$

بعد ذلك نأخذ منهم ما هو ناجح فقط وهو 20

$$\frac{4}{11} = \frac{20}{55} = \text{الاحتمال}$$

**٩ الأحداث المتنافية**

يقال أن  $A, B$  أحداث متنافية إذا كان  $A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**مثال (٢٢)** رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 ما احتمال عدد

أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر

**الحل**  $A$  عدد أقل من 3 هو  $\{1, 2\}$  ويكون  $P(A) = \frac{2}{6}$

$B$  عدد فردي هو  $\{1, 3, 5\}$  ويكون  $P(B) = \frac{3}{6}$

$$A \cap B = \{1\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

**مثال (٢٣)** مكتبة فيها 6 كتب دينية، 4 كتب رياضية

3 كتب فيزياء ما احتمال سحب كتاب ديني أو فيزياء

**الحل**

$$= P(\text{ديني}) + P(\text{فيزياء}) - P(\text{ديني و فيزياء})$$

$$= \frac{6}{13} + \frac{3}{13} - \frac{0}{13} = \frac{9}{13}$$

**مثال (٢٨)** سحبت كرة حمراء عشوائياً من كيس يحتوي

على كرتين زرقاء، 9 حمراء دون إرجاع ما احتمال سحب

كرة ثانية حمراء

**الحل** عدد الكرات كله هو 11 وتم سحب كرة حمراء

فيكون الباقي هو 10 كرات منها 8 أحمر

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$$

**٨ الاحتمال الشرطي (الفضاء المختزل)**

وفيه يتم وضع شرط لاختزال الفضاء إلى فضاء أصغر ويتم

حساب الاحتمال عليه فقط

**مثال (١٩)** عند رمي مكعب مرتين متتاليتين وملاحظة

الوجه العلوي في كل مرة ما احتمال ظهور العدد 4 على

أحدهما إذا كان مجموع العددين هو 9

**الحل**

هنا تم وضع شرط وهو أن مجموع العددين 9 لذلك لابد

من تعيين المجموع 9 واعتباره هو الفضاء

مجموع العددين 9 هو  $(3, 6)$  و  $(6, 3)$  و  $(4, 5)$  و  $(5, 4)$

عدد مرات ظهور العدد 4 هو 2

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

**مثال (٢٠)** عند رمي مكعب أرقام مرة واحدة ما احتمال

ظهور العدد 5 إذا كان الظاهر هو عدد فردي

**الحل**

هنا تم وضع شرط وهو أن العدد الظاهر فردي

لذلك لابد من تعيين العدد الفردي واعتباره هو الفضاء

العدد الفردي  $\{1, 3, 5\}$

عدد مرات ظهور العدد 5 هو 1

$$\frac{1}{5} = \text{الاحتمال هو}$$



## ١١ مقاييس النزعة المركزية

❖ **الوسط الحسابي** يستعمل في حالة عدم وجود

قيم متطرفة وتكون البيانات قريبة من بعضها

❖ **الوسيط** يستعمل عند وجود قيمة متطرفة ولا توجد

فراغات كبيرة في المنتصف

❖ **المنوال** يستعمل في حالة وجود تكرارات

**مثال (٢٧)** أي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب

10,11,11,15,10,11,12,13,14,17,11

a) وسيط b) وسط حسابي

c) انحراف d) منوال

**الحل** المنوال بسبب تكرار البيانات

**مثال (٢٨)** أي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب

14,15,16,18,20,23,24

a) وسيط b) وسط حسابي

c) انحراف d) منوال

**الحل** الوسط الحسابي لعدم وجود قيم متطرفة

## ١٢ هامش الخطأ

هامش الخطأ لمجموعة n من مجتمع هو  $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

**مثال (٢٩)** في دراسة مسحية تشتمل 100 طالب أفاد

85% منهم أن حصّة التربية الرياضية هامة إحصاء

هامش الخطأ وماهى الفترة الممكنة التى تكون فيها

حصّة التربية الرياضية ممكنة

**الحل**  $\pm 0,1 = \pm \frac{1}{10} = \pm \frac{1}{\sqrt{100}} = \pm \frac{1}{10}$  هامش الخطأ

بداية الفترة هى  $0,85 - 0,1 = 0,75$

نهاية الفترة هى  $0,85 + 0,1 = 0,95$

وتكون بذلك الفترة من 75% إلى 95%

## ١٣ الدراسة المسحية - التجريبية - الملاحظة

❖ **الدراسة المسحية** جمع البيانات عن طريق

الإستبيان

❖ **الدراسة بالملاحظة** هو تسجيل الملاحظات دون

محاولة التأثير على العينة

❖ **الدراسة التجريبية**

هو تسجيل الملاحظات ولكن بعد اجراء اي

تعديل على العينة

**مثال (٢٤)** عند ارسال استبانة الى المدارس الحكومية

والخاصة لاستطلاع رأيهم في مادة الرياضيات تكون نوع

الدراسة هو

a) دراسة تجريبية b) دراسة بالملاحظة

c) دراسة مسحية d) ارتباط

**الحل** نوع الدراسة مسحية لأنها إستبانة

**مثال (٢٥)** تم تقسيم عينه من الفئران إلى نصفين وإعطاء

احدهما دواء لمعرفة مدى فاعليته على مرض معين فإن

نوع الدراسة هو

a) دراسة تجريبية b) دراسة بالملاحظة

c) دراسة مسحية d) ارتباط

**الحل** نوع الدراسة تجريبية

**مثال (٢٦)** نريد معرفة إذا كان التدخين لمدة 10 سنوات

يؤثر في سعة الرئة أم لا

a) دراسة تجريبية b) دراسة بالملاحظة

c) دراسة مسحية d) ارتباط

**الحل** نوع الدراسة بالملاحظة



## ١٥ توزيع ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربه فيها يكون الحدث له

احتمال للنجاح و احتمال للفشل

إذا كانت  $P$  تعبر عن احتمال نجاح الحدث

$q$  تعبر عن احتمال فشل نفس الحدث

فإنه عند إجراء عدد  $n$  من المحاولات المستقلة لهذه

التجربة يكون

❖ المتوسط الحسابي هو  $np$

❖ التباين هو  $\sigma^2 = npq$

❖ الانحراف المعياري هو  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

**مثال ٣١** في تجربة ذات الحدين إذا تم إجراء 100

محاولة مستقلة وكان احتمال النجاح هو 25%

فما هو الوسط الحسابي والتباين

**الحل**

$$n = 100, \quad p = 25\%, \quad q = 75\%$$

$$np = 100 \times \frac{25}{100} = 25 \quad \text{الوسط الحسابي}$$

$$npq = 100 \times \frac{25}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{25 \times 75}{10000} = 18,75 \quad \text{التباين}$$

**تدريب 1** يقف رجلان وولدان في صف واحد ، فما احتمال

أن يقف رجل عند كل طرف من طرفي الصف إذا

اصطفوا بشكل عشوائي

a)  $\frac{1}{6}$

b)  $\frac{1}{24}$

c)  $\frac{1}{2}$

d)  $\frac{1}{12}$

**تدريب 2** إذا اخترت تبديلاً لأحرف المبينة أذناه عشوائياً ، فما

احتمال أن تتكون كلمة فيسيفاء

ف    ء    س    ف    ي    ا

a)  $\frac{1}{1260}$

b)  $\frac{1}{24}$

c)  $\frac{1}{620}$

d)  $\frac{1}{12}$

تدريب 3 ما هو أفضل وصف



## ١٦ القيمة المتوقعة

هي مجموع لحواصل ضرب كل قيمة للمتغير العشوائي

في احتماله

**مثال ٣٠** أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعب مرقم

من 1 إلى 6 مرة واحدة

**الحل**

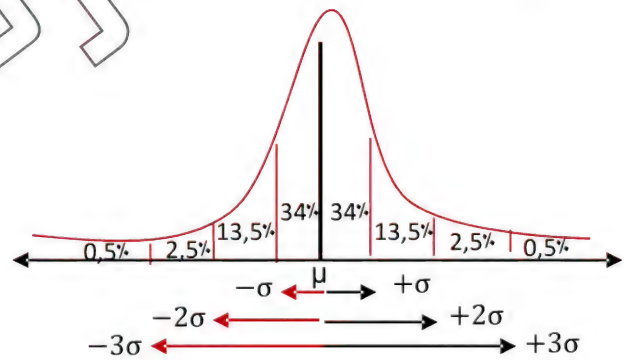
قيم المتغير العشوائي هي  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

وا احتمال كل منها هو  $\frac{1}{6}$

القيمة المتوقعة هي

$$1 \left(\frac{1}{6}\right) + 2 \left(\frac{1}{6}\right) + 3 \left(\frac{1}{6}\right) + 4 \left(\frac{1}{6}\right) + 5 \left(\frac{1}{6}\right) + 6 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{21}{6}$$

## ١٧ التوزيع الطبيعي



صفات المنحنى

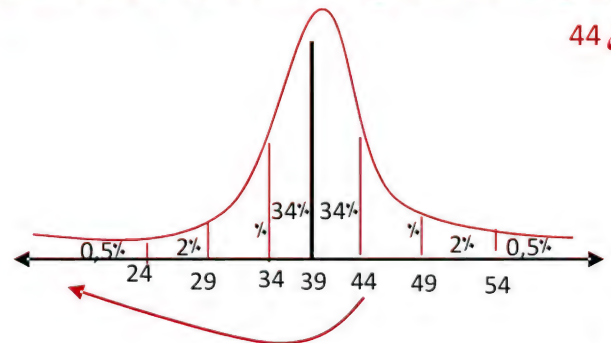
المساحة كلها = 1

المساحة ناحية اليمين 0,5 والمساحة ناحية اليسار 0,5

**مثال ٣١** إذا كان المنحنى أمامك هو منحنى توزيع

طبيعي لمتغير عشوائي فما احتمال أن يكون قيمته أقل

من 44



$$P(X \leq 44) = 34 + 34 + 13,5 + 2 + 0,5 =$$

$$= 84\%$$

**الحل**



## تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

### فيديو شرح التجميعات

٦ في دراسة أجريت على أوزان الطلاب في المرحلة الابتدائية كانت القراءات كما يلي

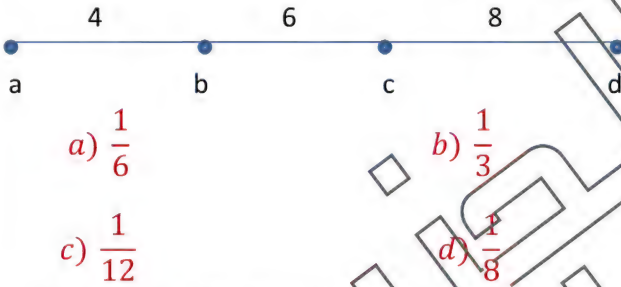
26	19	28	26	28	27	26	27
26	22	42	26	29	26	26	25
25	27	40	27	30	27	25	27

أي مقياس النزعة المركزية أكثر ملائمة لهذه القراءات

- (a) الوسيط (b) التباين  
(c) الوسط (d) المنوال

٧ في الشكل الآتي ما احتمال وقوع نقطة على

المستقيم bc



٨ يتوزع عمر 10000 مصباح كهربائي توزيع طبيعي

بمتوسط حسابي 300 يوم وانحراف معياري 40 يوم

كم مصباح يقع عمره بين 260 يوماً ، 340 يوماً

- a) 2500 b) 3400  
c) 5000 d) 6800

٩ يريد على أن يختار 2 كتاب من بين 6 كتب

مختلفة ، بكم طريقة يمكنه القيام بذلك ؟

- a) 25 b) 34  
c) 50 d) 15

### تجميعات 1437

١ أي مقياس النزعة المركزية يناسب البيانات التالية بشكل أفضل

15 ، 46 ، 52 ، 47 ، 75 ، 42 ، 53 ، 45

- (a) الوسيط (b) التباين  
(c) الوسط (d) المنوال

٢ حادثه ذات حدين تكررت 20 مرة وكان

المتوسط 12 اوجد الانحراف المعياري

- a)  $\sqrt{4,8}$  b) 4,8  
c) 1,2 d)  $\sqrt{1,2}$

٣ تتوزع مجموعة بيانات توزيعاً طبيعياً وسطه

الحسابي 12 وانحرافه المعياري 2 فما قيمة

$p(10 < x < 16)$

- a) 47,5% b) 40%  
c) 81,5 % d) 85%

### تجميعات 1436

٤ ما احتمال أن تنجب عائلة صبي في 3 مرات ولادة متتالية

- a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{1}{2}$   
c)  $\frac{1}{12}$  d)  $\frac{1}{8}$

٥ إذا ألقى حجراً نرد متميزين مرة واحدة فما

احتمال أن يظهر وجهين مجموعهما 8

- a)  $\frac{5}{6}$  b)  $\frac{5}{36}$   
c)  $\frac{2}{25}$  d) 30

### مفاتيح الحل

9	8	7	6	5	4	3	2	1
d	d	b	d	b	d	c	a	ج



تجميعات 1435

٨ أجريت دراسة مسحية على 100 شخص قالوا أن 47% من القراءة مفيدة فأى عينة من الأشخاص قالوا أنها مفيدة

- أ ( بين 23% و 50% )  
ب ( بين 37% و 57% )  
ج ( بين 30% و 46% )  
د ( بين 54% و 56% )

٩ يراد إختيار طالبين من بين 20 طالب ما احتمال أن يكون الطالبان هما عمر ومصعب

- a)  $\frac{1}{90}$  b)  $\frac{1}{190}$   
c)  $\frac{1}{19}$  d)  $\frac{1}{380}$

١٠ إذا كان  $n! = 120$  فإن قيمة  $(n-1)!$  هي

- a) 50 b) 60  
c) 25 d) 24

١١ رمى مكعب مرقم من 1 إلى 6 ، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر

- a)  $\frac{1}{6}$  b) 1  
c)  $\frac{2}{3}$  d)  $\frac{5}{6}$

١٢ أجريت دراسة على درجات الحرارة في فصل الشتاء بمنطقة ورصدت درجات الحرارة خلال إسبوع فكانت على النحو التالي 12 و 11 و 13 و 13 و 15 و 19 و 15 ما متوسط درجات الحرارة خلال هذا الإسبوع

- أ ( 13 )  
ب ( 14 )  
ج ( 15 )  
د ( 16 )

١٣ إذا كانت A, B حادثتين في فضاء لتجربة

عشوائية ما بحيث كان  $p(A) = 0,2$   $p(B) = 0,5$

وكان  $P(A \cup B) = 0,4$  فماقيمة  $P(A|B)$

- a) 0,6 b) 0,7  
c) 0,8 d) 24

١٤ في مجموعة من تسعة أعدادمختلفه أي ممايأتي

لايؤثر في الوسيط

A مضاعفة كل عدد

B زيادة كل عدد بمقدار 10

C زيادة القيمة الصغرى فقط

D زيادة القيمة الكبرى فقط

١٥ يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء ، 6 صفراء ، 4

كرات خضراء وكرتين زرقاء ماإحتمال سحب كرة

ليست صفراء

- a)  $\frac{5}{8}$  b)  $\frac{3}{8}$   
c)  $\frac{1}{8}$  d) 8

١٦ إذا رمى مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة ، فما

احتمال ظهور عدد أقل من 4

- a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{6}$   
c)  $\frac{2}{3}$  d)  $\frac{1}{3}$

١٧ يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية

و 5 أقلام رصاص صفراء مبرية و 5 أقلام صفراء غير

مبرية ، إذا تم سحب قلم من الصندوق فما احتمال أن

يكون القلم اصفر ، علمابأنه من الأقلام المبرية

- a)  $\frac{1}{5}$  b)  $\frac{5}{10}$  c)  $\frac{7}{15}$  d)  $\frac{5}{12}$

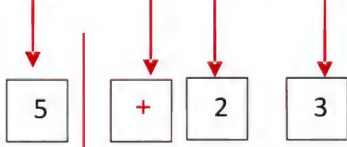
مفاتيح الحل

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
d	a	a	d	a	ب	c	d	d	b	ب

فيديو شرح التجميعات

## مثال ١ القطع المكافئ الذي معادلته

$$(y - 5)^2 = 8(x - 3)$$



معادلة محور التماثل  
 $y = 5$

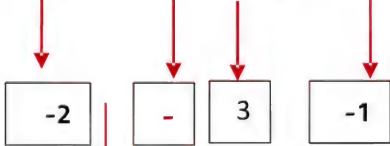
البؤرة  $(3 + 2, 5) = (5, 5)$

معادلة الدليل  $x = 3 - 2 = 1$

الرأس  $(3, 5)$  طول الوتر البؤري 8

## مثال ٢ القطع المكافئ الذي معادلته

$$(y + 2)^2 = -12(x + 1)$$



معادلة محور التماثل  
 $y = -2$

البؤرة  $(-1 - 3, -2) = (-4, -2)$

معادلة الدليل

$x = -1 + 3 = 2$

الرأس  $(-1, -2)$  طول الوتر البؤري 12

## مثال ٣ القطع المكافئ الذي معادلته

$$y^2 = 5x$$



معادلة محور التماثل  
 $y = 0$

البؤرة  $(0 + \frac{5}{4}, 0) = (\frac{5}{4}, 0)$

معادلة الدليل

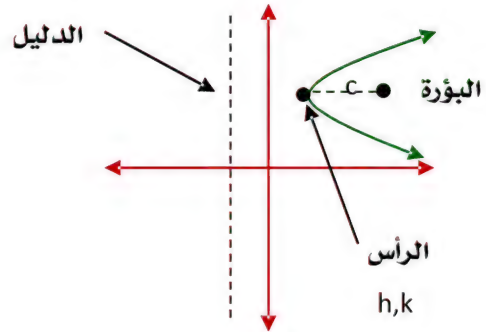
$x = 0 - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$

الرأس  $(0, 0)$  طول الوتر البؤري  $\frac{5}{4}$

## ١ القطع المكافئ

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

حيث معادلة القطع المكافئ المفتوح جهة  $x^+$



$h$  هي الإزاحة ناحية اليمين أو اليسار

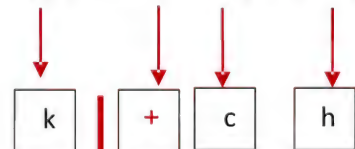
$k$  هي الإزاحة لأعلى أو لأسفل

$c$  البعد بين رأس القطع والبؤرة وهو نفسه البعد بين

الرأس والدليل

صفات القطع من المعادلة (المفتوح في  $x$ )

$$(y - k)^2 = + 4c(x - h)$$



من القوس الأيمن نستطيع إيجاد

من القوس الأيسر نستطيع إيجاد

البؤرة  $(h + c, k)$

معادلة محور التماثل

$y = k$

معادلة الدليل  $x = h - c$

الرأس  $(h, k)$  طول الوتر البؤري  $4c$

لمزيد من الفهم والتوضيح لديك الفيديو التالي

فيديو شرح



**مثال ٦** ماهي معادلة الدليل للقطع  $y^2 = 24x$

a)  $y = 6$   
c)  $x = 6$

b)  $y = -6$   
d)  $x = -6$

**الحل**  $y^2 = 24x$

$0 + 6 0$

معادلة الدليل هو  $x = 0 - 6 = -6$

**مثال ٧** ماهي معادلة محور التماثل للقطع

$(y - 3)^2 = -8x$

a)  $y = 3$   
c)  $x = 3$

b)  $y = -2$   
d)  $x = -3$

$(y - 3)^2 = -8x$

$3 - 2 0$

ويتضح أن معادلة محور التماثل هي  $y = 3$

صفات القطع من المعادلة (المفتوح في y)

$(x - h)^2 = + 4c(y - k)$

$h + c k$

من القوس الأيمن نستطيع إيجاد

البؤرة  $(h, k + c)$

معادلة محور التماثل

$x = h$

معادلة الدليل  $y = k - c$

الرأس  $(h, k)$  طول الوتر البؤري  $4c$

**مثال ٤** القطع المكافئ الذي معادلته

$(x + 1)^2 = 4(y - 3)$

$-1 + 1 3$

معادلة محور التماثل

$x = -1$

البؤرة  $(-1, 3 + 1) = (-1, 4)$

معادلة الدليل

$y = 3 - 1 = 2$

الرأس  $(-1, 3)$  طول الوتر البؤري 4

تكوين المعادلة من صفات القطع

**مثال ٥** أي القطوع التالية رأسه  $(2, 1)$

a)  $(y + 2)^2 = 3(x - 1)$  b)  $(x - 2)^2 = 3(y - 1)$   
c)  $(y - 2)^2 = 3(x - 2)$  d)  $(x + 2)^2 = 3(y + 1)$

**الحل** الحل الصحيح هو b



## مثال ١) حدد خصائص القطع الذي معادلته

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

$$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 16 \rightarrow b = 4$$

$$c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow c = 3$$

معادلة المحور

الأصغر

$$x = 2$$

معادلة المحور

الأكبر

$$y = 4$$

( 2 , 4 )

$$a=5$$

$$c=3$$

$$b=4$$

الرأسان

$$(2+5, 4)$$

$$(2-5, 4)$$

البؤرتان

$$(2+3, 4)$$

$$(2-3, 4)$$

الرأسان  
المرفقان

$$(2, 4+4)$$

$$(2, 4-4)$$

**ملحوظة** إذا علمت الرأسين أو الرأسين المرفقين

أو البؤرتين نستطيع الحصول على المركز

$$\text{المركز هو } \frac{x \text{ جمع}}{2} \quad \frac{y \text{ جمع}}{2}$$

## مثال ٢) ماهو مركز القطع الناقص الذي رأساه

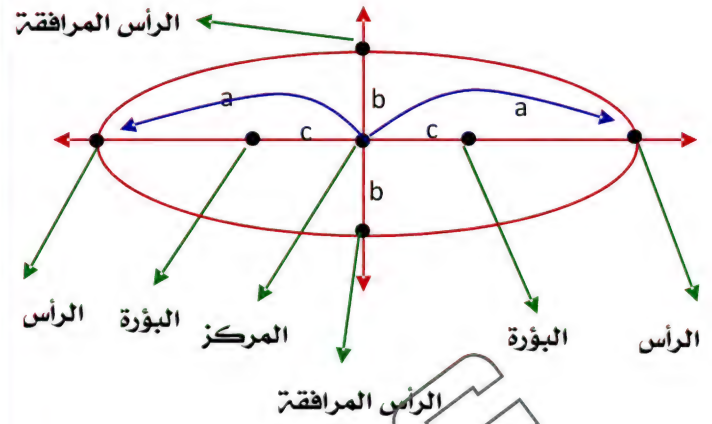
$$(2, 3) , (8, 3)$$

$$= \left( \frac{2+8}{2}, \frac{3+3}{2} \right) \text{ الحل المركز هو}$$

$$(5, 3)$$

## ٢) القطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



إذا كان المحور الأكبر أفقي

معادلة المحور

الأصغر

$$x = h$$

معادلة المحور

الأكبر

$$y = k$$

( h , k )

$$a$$

$$c$$

$$b$$

الرأسان

$$(h+a, k)$$

$$(h-a, k)$$

البؤرتان

$$(h+c, k)$$

$$(h-c, k)$$

الرأسان  
المرفقان

$$(h, k+b)$$

$$(h, k-b)$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

طول المحور الأكبر هو 2a

طول المحور الأصغر هو 2b

المسافة بين البؤرتين هو 2c



050367914



## ملحوظة

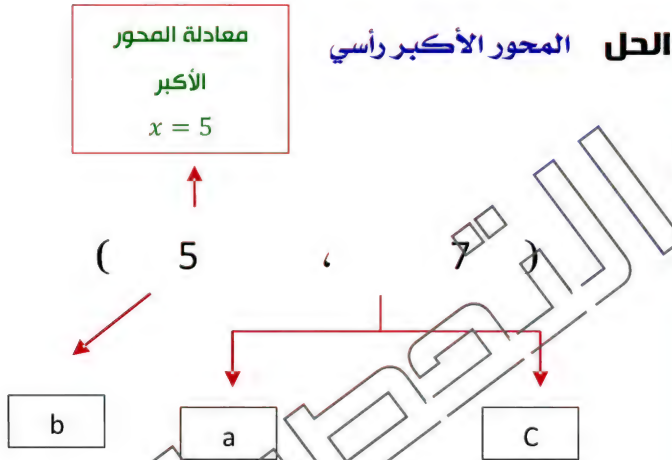
- ❖ المسافة بين الرأسين هو 2a
- ❖ المسافة بين البؤرتين هو 2c
- ❖ المسافة بين الرأسين المرافقين 2b

**مثال ٤** في القطع الناقص الذي رأساه المرافقان هما (1,7) و (1,-3) طول المحور الأصغر يكون .....

**الحل** حيث أن قيمة  $x$  في النقاط لا تتغير  
فإن التغير في قيمة  $y$  هو المسافة المطلوبة  
 $7 - (-3) = 10$

**مثال ٥** في القطع الناقص الذي معادلته  $\frac{(x-5)^2}{12} + \frac{(y-7)^2}{20} = 1$  تكون معادلة المحور الأكبر

a)  $y = 5$                       b)  $y = 7$   
c)  $x = 5$                       d)  $x = 7$



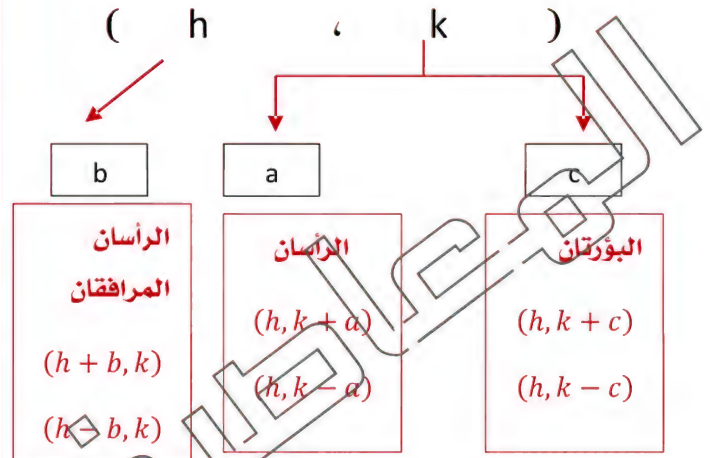
**مثال ٦** المسافة بين المركز والبؤرة للقطع  $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1$  هي

a) 5                      b)  $\sqrt{11}$   
c) 11                      d) 6

**الحل** لابد من تعيين  $c$   
 $c^2 = 36 - 25 = 11$   
 $c = \sqrt{11}$

إذا كان المحور الأكبر رأسي

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

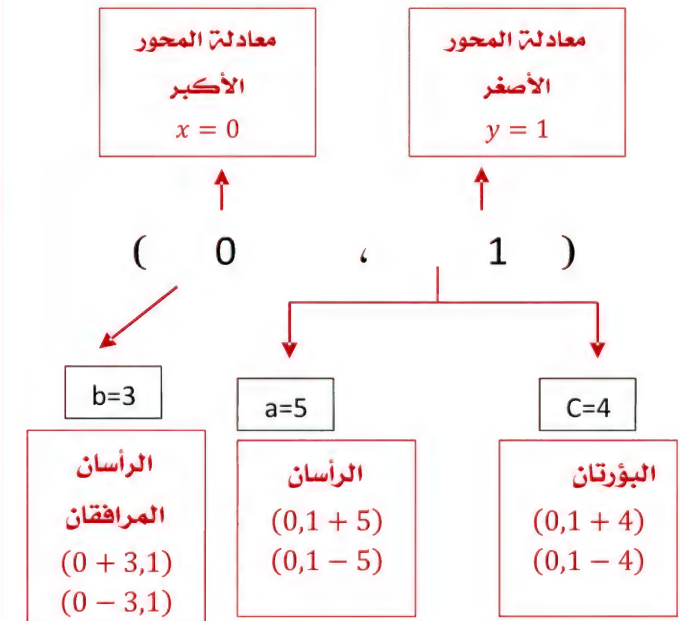


**مثال ٣** أوجد خصائص القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$   
 $b^2 = 9 \rightarrow b = 3$   
 $c^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4$

**الحل**



معادلة القطع الذي فيه المحور القاطع // y

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

مثال ٢ أوجد صفات القطع الذي معادلته

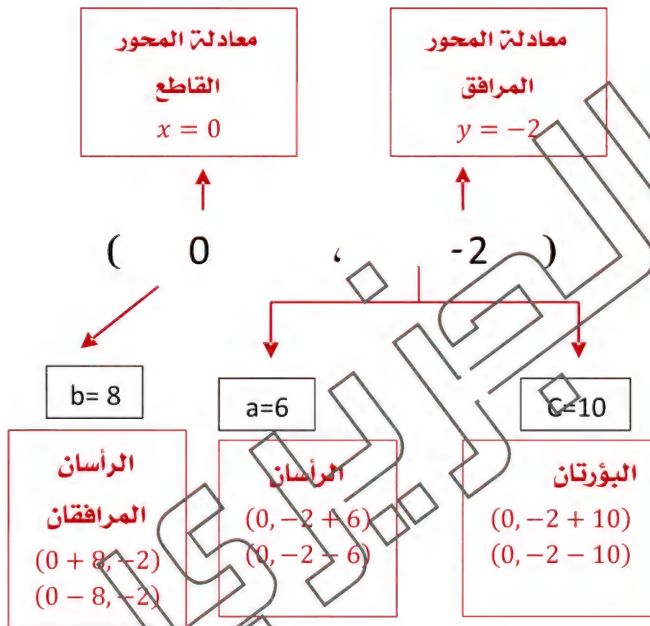
$$\frac{(y + 2)^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

حيث أن المحور القاطع // y

$$a^2 = 36 \rightarrow a = 6$$

$$b^2 = 64 \rightarrow b = 8$$

$$c^2 = 64 + 36 = 100 \rightarrow c = 10$$



طول المحور القاطع  $2a = 12$

طول المحور المرافق  $2b = 16$

معادلة خطوط التقارب  $y + 2 = \pm \frac{6}{8}(x - 0)$

$$\frac{(x+5)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

في القطع الزائد الرأس

الحل البعد بين المركز والرأس هو a

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$$

مثال ٧ طول المحور الأصغر في القطع

$$\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1$$

a) 5  
c) 10

b) 36  
d) 6

الحل لابد من تعيين b أولاً

$$b^2 = 25 \rightarrow b = 5$$

طول المحور الأصغر هو  $2b = 10$

القطع الزائد

بنفس الطريقة التي عرضناها في القطع الناقص سوف

يتم شرح القطع الزائد

معادلة القطع الذي فيه المحور القاطع // x

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

مثال ١ عين خصائص القطع

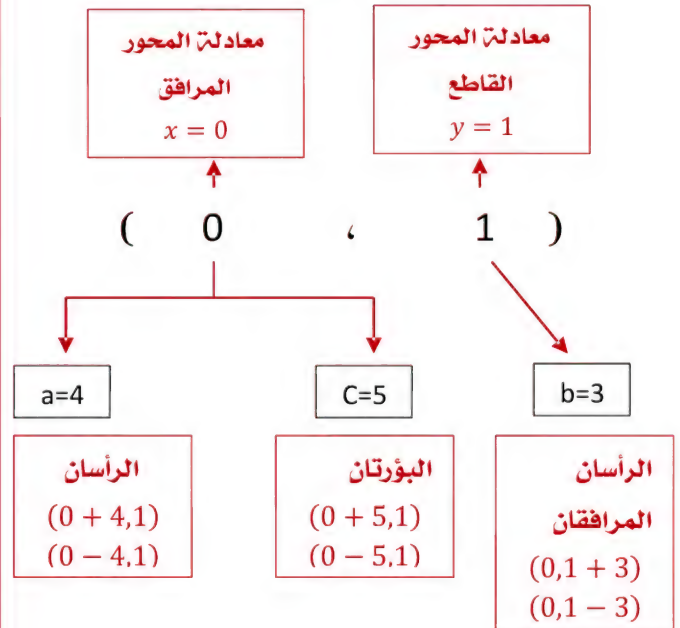
$$\frac{x^2}{16} - \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$$

حيث أن المحور القاطع // x

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

$$c^2 = 16 + 9 = 25 \rightarrow c = 5$$



طول المحور القاطع  $2a = 8$

طول المحور المرافق  $2b = 9$

معادلة خطوط التقارب  $y - 1 = \pm \frac{3}{4}(x - 0)$





## ٤ معامل الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

❖ في حالة القطع الناقص تكون  $e$  أصغر من 1

❖ في حالة القطع الزائد تكون  $e$  أكبر من 1

❖ في حالة الدائرة يكون  $e = 0$

**مثال ١** قطع ناقص المسافة بين البؤرتين 10 وطول المحور الأكبر 20 فإن معامل الاختلاف له هو .....

**الحل**

$$2c = 10 \rightarrow c = 5$$

$$2a = 20 \rightarrow a = 10$$

$$e = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

**مثال ٢** ماهو معامل الاختلاف المركزي للقطع

$$\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

$$c^2 = 9 + 7 = 16 \rightarrow c = 4$$

$$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$$

$$e = \frac{4}{3}$$

## ٥ تصنيف القطوع

المعادلة العامة للقطوع

$$ax^2 + bxy + cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

قطع مكافئ

$$\rightarrow = 0$$

قطع زائد

$$\rightarrow = \text{موجب}$$

قطع ناقص

$$\rightarrow = \text{سالب}$$

$$\rightarrow = \text{سالب و } b = 0, a = c \text{ دائرة}$$

$$b^2 - 4ac$$

**مثال ١** المعادلة  $x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 5y$

هي معادلة

a) قطع ناقص b) قطع زائد

c) قطع مكافئ d) دائرة

$$a = 1, b = -5, c = 3$$

**الحل**

$$b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 1 \times 3 = 13$$

قطع زائد

**مثال ٢** المعادلة  $x^2 + y^2 - 2x + 5y$

هي معادلة

a) قطع ناقص b) قطع زائد

c) قطع مكافئ d) دائرة

$$a = 1, b = 0, c = 1$$

**الحل**

وبذلك تصبح معادلة دائرة

## ٦ معادلة الدائرة

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

حيث  $(h, k)$  هي مركز الدائرة

$r$  نصف قطر الدائرة

**مثال ١** معادلة دائرة  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

مركزها هو ..... ونصف قطرها هو .....

**الحل** المركز هو  $(-2, 1)$  نصف القطر  $\sqrt{5}$

**مثال ٢** أي المعادلات هي معادلة دائرة مركزه

نقطة الأصل

$$a) x^2 + y^2 = 4$$

$$b) (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$c) 5x^2 + 3y^2 = 1$$

$$d) x + y = 1$$

**الحل** a) الحل الصحيح هو a

**مثال ٣** أي النقاط الآتية تقع على الدائرة

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

$$a) (1, 2)$$

$$b) (1, 3)$$

$$c) (2, 0)$$

$$d) (1, 0)$$

**الحل** نقطة تقع على الدائرة أي تحقق معادلتها

وتجعل طرفها الأيسر = الأيمن

النقطة الصحيحة هو  $(1, 0)$  d) لأنه عند التعويض عن

$$x = 1, y = 0 \text{ يكون الناتج } 9$$

تجميعات 1437

١ ما نوع القطع في المعادلة

$$4x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$$

- أ قطع مكافئ  
ب قطع زائد  
ج قطع ناقص  
د دائرة

٢ المعادلة  $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$  هي لقطع زائد

فما هي معادلتا خطي التقارب له

- a)  $y = \pm \frac{4}{5}x$   
b)  $y = \pm \frac{5}{4}x$   
c)  $y = \pm \frac{1}{5}x$   
d)  $y = \pm \frac{1}{4}x$

٣ ما المعادلة التي تمثل قطع مكافئ رأسه عند

النقطة (2,2) ويمر بالنقطة (0,6)

- a)  $y = x^2 - 4x + 6$   
b)  $y = x^2 - 4x - 6$   
c)  $y = -x^2 - 4x + 6$   
d)  $y = -x^2 + 4x + 6$

٤ ما هي معادلة القطع المكافئ الذي مركزه

(0,0) وطول وتره البؤري 12 ومفتوح في x الموجبة

- a)  $y^2 = 4x$   
b)  $y^2 = 12x$   
c)  $y^2 = 6(x + 2)$   
d)  $x^2 = 12y$

٥ معادلة محور التماثل للقطع  $y^2 = -8(x - 1)$

- a)  $y = 0$   
b)  $y = -8$   
c)  $x = 1$   
d)  $x = 8$

٦ ما طول المحور الأكبر للقطع

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

- a) 25  
b) 9  
c) 10  
d) 6

٧ معادلة المحور الأكبر للقطع

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- a)  $y = 0$   
b)  $y = 5$   
c)  $x = 3$   
d)  $x = 4$

٨ مركز القطع  $\frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$  هو

- a) (2,3)  
b) (2,-3)  
c) (3,2)  
d) (12,16)

٩ في القطع الزائد الذي معادلته  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

طول المحور القاطع هو

- a) 6  
b) 3  
c) 4  
d) 8

١٠ في القطع الزائد الذي معادلته  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

معادلتا خطي التقارب هي

- a)  $y = \pm \frac{4}{5}x$   
b)  $y = \pm 5x$   
c)  $y = 4x$   
d)  $y = \pm \frac{5}{4}x$

١١ معامل الاختلاف المركزي للقطع  $\frac{x^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

- a)  $e = 0$   
b)  $e = \frac{3}{5}$   
c)  $e = 1$   
d)  $e = \frac{5}{3}$

مفاتيح الحل

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	a	c	b	a	c	a	b	ج	b	a

فيديو نشرح التجميعات



**مثال ٤** أي المعادلات الآتية لخط مستقيم ميله 3

ويمر بالنقطة (2,1)

- a)  $y = 3x + 5$       b)  $2y = 3x - 4$   
c)  $y = 3x - 5$       d)  $5y = 4x$

**الحل** الحل الصحيح هو c)  $y = 3x - 5$

لأن الميل 3 وعند التعويض بالنقطة (2,1) نجد أن  
الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

**مثال ٥** أي المعادلات الآتية لخط مستقيم ميله 3

ويمر بالنقطة (2,1)

- a)  $(y - 1) = 3(x - 2)$       b)  $3(y + 1) = (x + 2)$   
c)  $(y - 2) = 3(x - 1)$       d)  $5y = 4x$

**الحل**

الحل الصحيح هو a)  $(y - 1) = 3(x - 2)$

المستقيمات المتوازية لها نفس الميل

المستقيمات المتعامدة حاصل ضرب ميليهما -1

**مثال ٦** أي المستقيمات الآتية عمودي على

المستقيم  $y = 3x - 4$

- a)  $y = \frac{-1}{3}x + 1$       b)  $y = -3x + 2$   
c)  $3y = x + 5$       d)  $y = x - 3$

**الحل**

الحل الصحيح هو

a)  $y = \frac{-1}{3}x + 1$

**مثال ٧** أي المستقيمات الآتية موازي للمستقيم

$y = 3x - 4$

- a)  $y = \frac{-1}{3}x + 1$       b)  $y = 3x + 2$   
c)  $3y = x + 5$       d)  $y = x - 3$

**الحل**

الحل الصحيح هو

b)  $y = 3x + 2$

**١ ميل الخط المستقيم**

ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**مثال ١** ما هو ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين

$(-2, -4), (3, 2)$

$$m = \frac{2 - (-4)}{3 - (-2)} = \frac{6}{5}$$

**الحل**

**مثال ٢** إذا كان ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين

$(-1, 4), (2, k)$  هو 3 أوجد k

$$\frac{k - 4}{2 - (-1)} = 3$$

**الحل**

$$k - 4 = 15 \rightarrow k = 19$$

**٢ معادلات الخط المستقيم**

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويقطع من y الجزء b

$$y = mx + b$$

**مثال ١** المستقيم الذي معادلته  $y = 3x - 2$

ميله هو ..... والمقطع y هو .....

**الحل** الميل هو 3 ومقطع y هو -2

**مثال ٢** المستقيم الذي ميله -4 والمقطع y هو 5

- a)  $y = -4x + 5$       b)  $y = 5x - 4$   
c)  $y = 4x + 5$       d)  $5y = 4x$

**الحل** الحل الصحيح هو a)  $y = -4x + 5$

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة  $(x_1, y_1)$

هي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

#### ٤ صورة نقطة بالازاحة

صورة نقطة  $(x, y)$  بالازاحة هي  $(x + a, y + b)$

- ❖  $a$  تكون موجبة إذا كانت الازاحة لليمين
- ❖  $a$  تكون سالبة إذا كانت الازاحة لليسار
- ❖  $b$  تكون موجبة إذا كانت الازاحة لأعلى
- ❖  $b$  تكون سالبة إذا كانت الازاحة لأسفل

**مثال ١** صورة النقطة  $(-2, 3)$  بإزاحة مقدارها 3 إلى اليمين وإزاحة مقدارها 5 لأسفل هي

$$(-2 + 3, 3 - 5) \rightarrow (1, -2)$$

**مثال ٢** صورة النقطة  $(3, 5)$  بالازاحة  $(x - 1, y + 3)$  هي  $(3 - 1, 5 + 3) \rightarrow (2, 8)$

**مثال ٣** النقطة  $(6, 2)$  هي صورة النقطة  $(4, 5)$  عن طريق إزاحة هي

- a)  $(x + 2, y - 3)$       b)  $(x - 2, y + 3)$   
c)  $(x + 3, y - 2)$       d)  $(x - 3, y + 2)$

**الحل**

a)  $(x + 2, y - 3)$  الحل الصحيح هو

#### ٥ الدوران بعكس عقارب الساعة

الصورة	زاوية الدوران	النقطة
$(-b, a)$	90	$(a, b)$
$(b, -a)$	270	$(a, b)$
$(-a, -b)$	180	$(a, b)$

**مثال ١** صورة النقطة  $(-2, 5)$  بالدوران بزاوية 90 عكس عقارب الساعة هي  $(-5, -2)$

**مثال ٢** النقطة  $(3, 4)$  هي صورة النقطة  $(4, -3)$  عن طريق

- a) انعكاس في  $x$       b) انعكاس في  $y$   
c) دوران بزاوية 270      d) دوران بزاوية 90

**الحل**

الحل الصحيح هو c) دوران بزاوية 270

❖ الخط المستقيم الرأسي الذي يقطع محور  $x$  في

العدد  $a$  معادلته هي  $x = a$

❖ الخط المستقيم الأفقي الذي يقطع محور  $y$  في

العدد  $b$  معادلته هي  $y = b$

**مثال ١** معادلة المستقيم الأفقي الذي يقطع محور  $y$  في العدد 7 هو

- a)  $y = -7$       b)  $y = 7$   
c)  $x = -7$       d)  $x = 7$

**الحل**

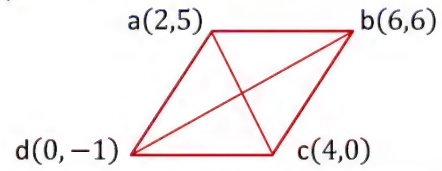
b)  $y = 7$  الحل الصحيح هو

إذا كان لدينا نقطتان  $(x_1, y_1)$  ,  $(x_2, y_2)$

❖ المسافة بينهما  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

❖ نقطة المنتصف  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

**مثال ٢** أوجد نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع



**الحل** نقطة تقاطع القطرين لمتوازي الأضلاع هي نقطة منتصف أحد القطرين

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

نقطة المنتصف

#### ٢ صورة نقطة بالانعكاس

صورة نقطة تقع على خط الانعكاس هي نفسها

الصورة	حول محور	النقطة
$(a, -b)$	$x$	$(a, b)$
$(-a, b)$	$y$	$(a, b)$
$(b, a)$	$y = x$	$(a, b)$

**مثال ١** صورة النقطة  $(3, -2)$  بالانعكاس حول

محور  $x$  هي  $(3, 2)$

صورة النقطة  $(3, -2)$  بالانعكاس حول محور  $y = x$  هي

$(-2, 3)$



## تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

### تجميعات 1437

١ النقطة (3,5) هي صورة النقطة (5,3) بانعكاس حول

- (أ) محور x (ب) محور y  
(ج) محور  $y=x$  (د) نقطة الأصل

٢ مثلث يحدث له إنعكاس مرتين على مستقيمين متوازيين فما المحصلة لهما

- (أ) إنعكاس (ب) دوران  
(ج) إزاحة (د) تمدد

### تجميعات 1436

٣ ما هي الإزاحة التي نقلت النقطة (1,3) إلى (0,5)

- (أ)  $(x-3, y+3)$  (ب)  $(x-1, y+2)$   
(ج)  $(x-1, y+2)$  (د)  $(x+1, y+5)$

٤ ما هو ميل المستقيم المار بالنقطتين

- (3,4) و (1,-2)  
(أ) 3 (ب) -3  
(ج)  $\frac{1}{3}$  (د)  $-\frac{1}{2}$

### مفاتيح الحل

4	3	2	1
أ	ب	ج	ج

فيديو شرح التجميعات

## ٦ التمدد

معامل التمدد k هو  $\frac{\text{الطول في الصورة}}{\text{الطول الأصلي}}$

- ❖  $|k| > 1$  يكون التمدد تكبير  
❖  $|k| < 1$  يكون التمدد تصغير  
❖  $|k| = 1$  يكون التمدد تطابق

صورة النقطة (x, y) بتمدد معامله k هو (kx, ky)

مثال ١ إذا كان  $A'B' = 8$  وهو صورة  $AB = 6$  فإن معامل التمدد هو .....

الحل  $K = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

مثال ٢ إذا كان معامل التمدد المستخدم في إيجاد صورة نقطة هو -3 فإن هذا التمدد هو .....

الحل حيث أن  $|K| = 3$  يكون التمدد تكبير

مثال ٣ ما هي صورة النقطة (10,15) بتمدد معامل  $-\frac{1}{5}$

الحل  $(-\frac{1}{5} \times 10, -\frac{1}{5} \times 15)$   
 $(-2, -3)$

### ملحوظة

١ الإنعكاس في خطين متوازيين يكافئ إزاحة مقدارها ضعف المسافة بين الخطين المتوازيين ويكون اتجاه الإزاحة عمودي على الخطين المتوازيين

٢ الإنعكاس في خطين متقاطعين يكافئ دوران مركزه نقطة تقاطع الخطين وزاويته ضعف الزاوية بين الخطين





## ١ المضلعات

❖ مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه  $n$

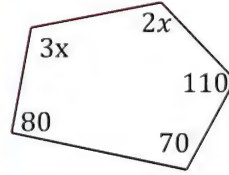
$$(n - 2) \times 180$$

مثال ١ ما هو مجموع زوايا مضلع عدد أضلاعه 10

الحل مجموع الزوايا هو

$$(10 - 2) \times 180 = 8 \times 180 = 1440$$

مثال ٢ ماقيمة  $x$  في الشكل



الحل

مجموع زوايا الخماسي هو 540

$$2x + 3x + 110 + 70 + 80 = 540$$

$$5x = 280$$

$$x = 56$$

❖ قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه  $n$

$$\frac{(n - 2) \times 180}{n}$$

مثال ٢ ما هو قياس زاوية المضلع الثماني المنتظم

الحل قياس الزاوية هو

$$\frac{(8 - 2) \times 180}{8} = 135$$

❖ عدد أضلاع مضلع منتظم قياس زاويته الداخلية  $A$

$$\frac{360}{180 - A}$$

مثال ٣ ما هو عدد أضلاع مضلع منتظم قياس إحدى

زواياه 135

الحل

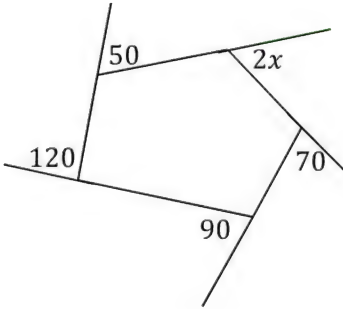
عدد الأضلاع هو

$$\frac{360}{180 - 135} = 8$$

❖ مجموع الزوايا الخارجية لأي مضلع هو 360

مثال ٤

ماقيمة  $x$  في الشكل



الحل

$$2x + 50 + 120 + 90 + 70 = 360$$

$$2x = 30$$

$$x = 15$$

٢ الأشكال الرباعية

❖ خصائص متوازي الأضلاع

١ كل ضلعان متقابلان متطابقان

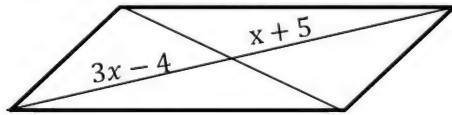
٢ كل ضلعان متقابلان متوازيان

٣ كل زاويتان متقابلتان متساويتان

٤ كل زاويتان متجاورتان مجموعهما 180

٥ القران ينصف كل منهما الآخر

مثال ٥ إذا كان الشكل متوازي أضلاع أوجد قيمة  $x$



الحل

حيث أن القطران ينصف كل منهما الآخر

$$3x - 4 = x + 5$$

فإن

$$x = 4,5$$

أي أن

### ❖ خصائص المعين

#### + له نفس خصائص متوازي الاضلاع

- ❶ القطران متعامدان
- ❷ جميع أضلاعه متطابقة
- ❷ القطران ينصفان زوايا الرأس

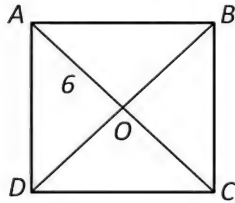
### ❖ خصائص المربع

#### + له نفس خصائص متوازي الاضلاع

- ❶ القطران متعامدان
- ❷ القطران متطابقه
- ❷ جميع زواياه قوائم
- ❸ القطران ينصفان زوايا الرأس

المربع = مستطيل + معين

#### مثال ٨) الشكل المرسوم مربع أوجد طول BD

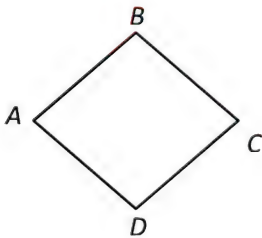


الحل

حيث أن  $AO = 6$  فإن  $AC = 12$   
من خواص المربع  $AC = BD$   
لذلك فإن  $BD = 12$

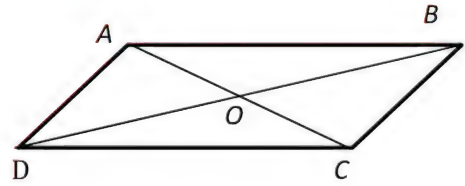
تدريب  $ABCD$  معين فيه

أوجد قيمة  $x$   $AB = 5x - 2$ ,  $BC = x + 9$



#### مثال ٦) $ABCD$ متوازي أضلاع فيه

أوجد قيمة  $x$   $AO = x - 1$ ,  $AC = 14$



الحل

حيث أن  $AC = 14$  فإن  $AO = 7$

$$x - 1 = 7$$

$$x = 8$$

أي أن

ومنها

### ❖ خصائص المستطيل

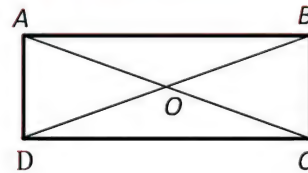
#### + له نفس خصائص متوازي الاضلاع

- ❶ القطران متطابقان

- ❷ زواياه الأربع قوائم

#### مثال ٧) $ABCD$ مستطيل فيه

أوجد قيمة  $x$   $BO = 11$ ,  $AC = 4x - 2$



الحل

حيث أن  $BO = 11$  فإن  $BD = 22$

$$BD = AC$$

$$4x - 2 = 22$$

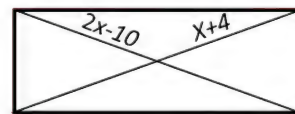
$$x = 6$$

من خواص المستطيل

ومنها

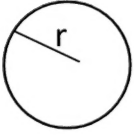
أي أن

تدريب أوجد قيمة  $x$  في الشكل

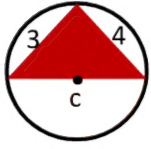




### ٣ الدائرة



محيط الدائرة  $C = 2\pi r$  أو  $d = \pi d$  حيث  $r$  نصف القطر،  $d$  هو القطر



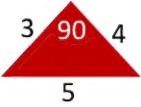
مثال ١١ أوجد محيط الدائرة

الحل

قياس الزاوية المرسومة في منتصف الدائرة هو 90

يكون طول القطر 5 من فيثاغورث

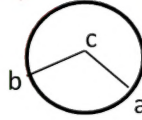
محيط الدائرة هو  $5\pi$



### ❖ الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

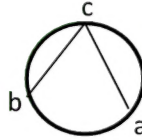
١ الزاوية المركزية = قياس القوس المقابل لها

$$m\angle acb = m\widehat{ab}$$



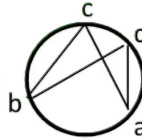
٢ الزاوية المحيطية =  $\frac{1}{2}$  قياس القوس المقابل لها

$$m\angle acb = \frac{1}{2}m\widehat{ab}$$



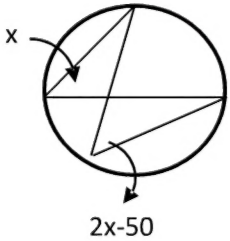
٣ الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس تكون متساوية

$$m\angle c = m\angle d$$



مثال ١٢ أوجد قيمة  $x$  في الرسم

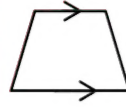
الحل



$$2x - 50 = x$$

$$x = 50$$

### ❖ خصائص شبه المنحرف



١ ضلعان متقابلان متوازيان

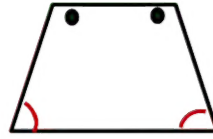
٢ ضلعان متقابلان غير متوازيان

### ❖ خصائص شبه المنحرف متطابق الساقين

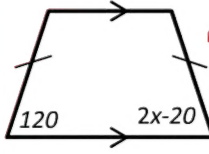
١ الضلعان الغير متوازيان متساويان

٢ القطران متساويان

٣ كل زاويتان مرسومتان على القاعدة تكون متساوية



مثال ٩ أوجد قيمة  $x$  في الشكل



الحل من خواص شبه المنحرف المتطابق الساقين أن

زوايا قاعدته متساوية

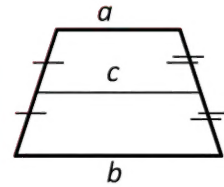
$$2x - 20 = 120$$

لذلك فإن

$$x = 70$$

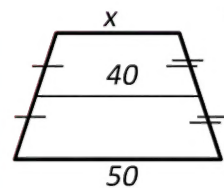
ومنها

### ❖ القاعدة المتوسطة في شبه المنحرف



$$C = \frac{a + b}{2}$$

مثال ١٠ أوجد قيمة  $x$  في الشكل



الحل

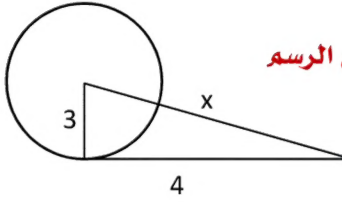
$$40 = \frac{x + 50}{2}$$

$$x + 50 = 80$$

$$x = 30$$

أي أن

ومنها

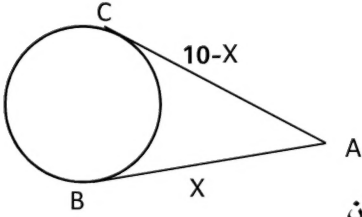


**مثال ١٥** أوجد قيمة  $x$  في الرسم

**الحل**

حيث أن المماس للدائرة عمودي على نصف القطر من عند نقطة التماس

فإن المثلث يصبح قائم الزاوية وبذلك فإن قيمة  $x$  هي 5 من فيثاغورث



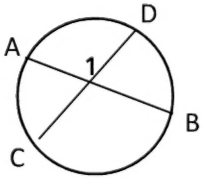
**مثال ١٥** أوجد قيمة  $x$

**الحل**

القطعتان المماستان متساويتان

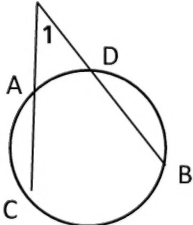
$$\begin{aligned} x &= 10 - x \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

❖ القاطع والمماسات في الدائرة



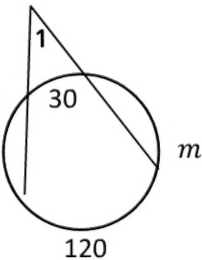
❶ إذا تقاطع وتران داخل الدائرة فإن

$$m < 1 = \frac{m\widehat{CB} + m\widehat{AD}}{2}$$



❷ إذا تقاطع وتران خارج الدائرة فإن

$$m < 1 = \frac{m\widehat{CB} - m\widehat{AD}}{2}$$



**مثال ١٦** أوجد قياس  $1 >$  في الرسم

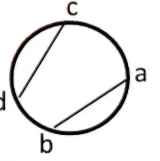
**الحل**

$$m < 1 = \frac{120 - 30}{2} = 45$$

❖ الأقواس و الأوتار في الدائرة

إذا تطابق وتران في الدائرة فإن

أقواسهما متساوية والعكس صحيح

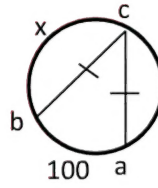


إذا كان  $ab = cd$

فإن  $\widehat{ab} = \widehat{cd}$

**مثال ١٣** في الشكل المقابل أوجد قيمة  $x$

**الحل**



$$ac = cb$$

$$\widehat{ac} = \widehat{cb} = x$$

فإن

وحيث أن قياس الدائرة = 360

$$x + x + 100 = 360$$

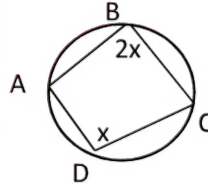
$$2x = 280$$

$$x = 140$$

❖ الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة

فيه كل زاويتان متقابلتان مجموعهما 180

**مثال ١٤** أوجد قياس زاوية B



**الحل**

حيث أن الشكل رباعي دائري

$$x + 2x = 180$$

$$3x = 180$$

$$x = 60$$

وبذلك فإن قياس زاوية B تساوي 120

❖ المماسات في الدائرة

❶ المماس للدائرة عمودي على نصف القطر من عند

نقطة التماس

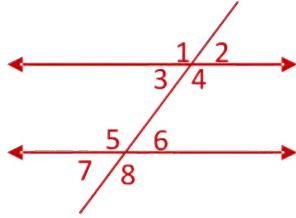
❷ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارجها

متطابقتان



## ٤ التوازي

❖ في الشكل المقابل إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ينتج الحالات الآتية



❖ الزوايا في وضع التبادل

قياس (3) = قياس (6)      قياس (4) = قياس (5)  
قياس (1) = قياس (8)      قياس (2) = قياس (7)

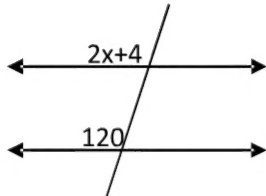
❖ الزوايا في وضع التناظر

قياس (1) = قياس (5)      قياس (3) = قياس (7)

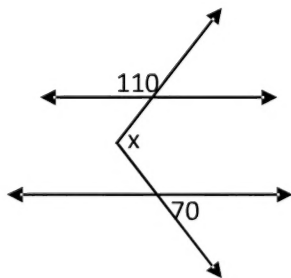
❖ الزوايا في وضع التحالف

قياس (4) + قياس (6) = 180

قياس (3) + قياس (5) = 180

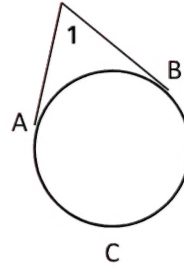


تدريب 1 أوجد قيمة x



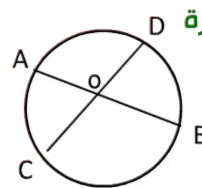
تدريب 2 أوجد قيمة x

❖ إذا تقاطع مماسان خارج الدائرة



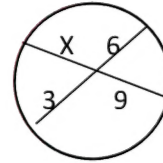
$$m < 1 = \frac{m\widehat{ACB} - m\widehat{AB}}{2}$$

❖ القطع المستقيمة داخل الدائرة

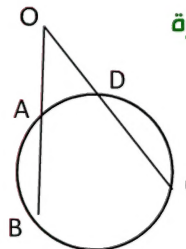


❖ إذا تقاطع AB, CD داخل الدائرة

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$

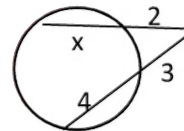


تدريب أوجد قيمة x

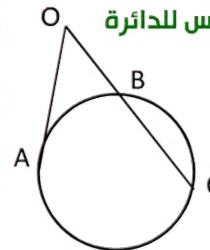


❖ إذا تقاطع AB, CD خارج الدائرة

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$

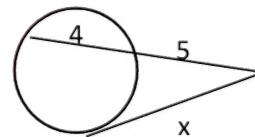


تدريب أوجد قيمة x



❖ إذا تقاطع OC قاطع, OA مماس للدائرة

$$(OA)^2 = OB \cdot OC$$



تدريب أوجد قيمة x

تجميعات 1437

١ إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع مثلي مجموع قياسات زواياه الخارجية ، فمأنوع هذا المضلع

A مربع B خماسي C سداسي D ثماني

٢ قياس زاويتين متجاورتين في متوازي الأضلاع هما

$$3x + 42 , \quad 2x - 42$$

ما قياس الزاويتين

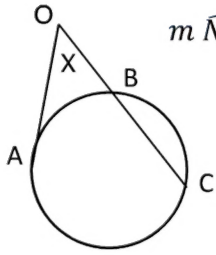
$$140, 40 \text{ B} \quad 150, 30 \text{ A}$$

$$135, 45 \text{ D} \quad 100, 80 \text{ C}$$

٣ ما محيط المثلث المرسوم

$$36 \text{ B} \quad 24 \text{ A}$$

$$72 \text{ D} \quad 50 \text{ C}$$



٤ إذا كان  $m\widehat{NR} = 62$  ,  $m\widehat{NP} = 108$  فما قيمة X

$$64 \text{ B} \quad 23 \text{ A}$$

$$128 \text{ D} \quad 31 \text{ C}$$

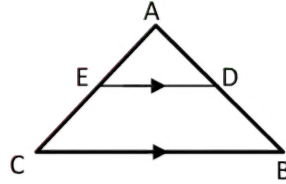
مفاتيح الحل

4	3	2	1
b	b	a	C

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

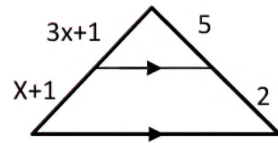
١ القطعة المستقيمة الواصلة بين ضلعين في مثلث وتوازي

الضلع الثالث فإنها تقسمهما إلى أجزاء متناسبة



$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

مثال ١٠ أوجد قيمة x



$$\frac{3x+1}{x+1} = \frac{5}{2}$$

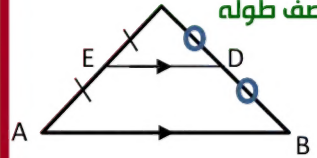
$$5x+5 = 6x+2$$

$$x = 3$$

الحل

٢ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين في

مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصف طوله

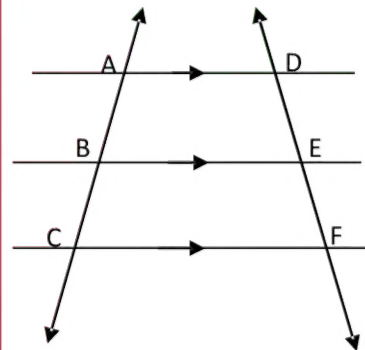


$$CD = \frac{1}{2} AB$$

٣ إذا قطع قاطعان ثلاث مستقيمات متوازية أو أكثر فإن

الأجزاء الناتجة على أحدهما تتناسب مع الأجزاء الناتجة على

القاطع الآخر



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$